مذكرة رقم : 2
الأستاذ : عثماني نجيب

مذكرة رقم 2 في درس نهاية متتالية

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ وتمثيلها مبيانيا؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\ge0}$ و $(n^2)_{n\ge0}$ و $(n^3)_{n\ge0}$ و $(\sqrt{n})_{n\ge0}$ و $(n^p)_{n\ge0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\ge0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهاية متتالية هندسية (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$. - العمليات على النهايات؛	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$؛ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛	- نقبل أن المتتاليات $(n)_{n\ge0}$ و $(n^2)_{n\ge0}$ و $(n^3)_{n\ge0}$ و $(\sqrt{n})_{n\ge0}$ و $(n^p)_{n\ge0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ وأن المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\ge0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\ge0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$ اعتبارا لكون المتتاليات العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛ - جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج

I. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

نشاط: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 9x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{8}x^4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^6$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 7\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -6\sqrt{x}$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

خاصية1 :

المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\ge4$ تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

خاصية2 :

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية: المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\ge4$ تؤول الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$

تمرين1 : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}n^6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^9$

أجوبة: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^3}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^7}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^5=-\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}n^6=-\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^9=+\infty$

I. متتاليات نهايتها عدد

مثال : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

أجوبة: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3=0+3=3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7=0-7=-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5=0+5=5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

ملاحظات :
- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

II. نهاية المتتالية $\left(a^n\right)$

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a\succ 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a=1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1\prec a\prec 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a\leq -1$ فان : المتتالية $\left(a^n\right)$ ليست لها نهاية

أمثلة : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5)^n$

أجوبة: : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ لأن: $a=2>1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-5<-1$

تمرين 2: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$,

أجوبة: : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$ لأن: $-1<a=0.7<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{1}{4}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

III. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا حقيقية نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع و الضرب

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	ش غ م

2. المقلوب و الخارج:

$\lim u_n$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\frac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

$\lim u_n$	l	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$-\infty$	$l\prec 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l\prec 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	ش غ م	ش غ م

أمثلة : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ (3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$ ، (4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

(5 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n$ (6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$

أجوبة: (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1=0-0+0-1=-1$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

(5 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n=\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ و $+\infty\times+\infty=+\infty$ $-1<a=\frac{2}{3}<1$

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$

(6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ و $+\infty\times-\infty=-\infty$

ملاحظة :

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين3 : أحسب النهايات التالية : (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$ (2 $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$ (3 $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$ (4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5}$

(5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}$ (6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$ (7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ (8 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$

أجوبة: (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}=\frac{5}{3}$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1=\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3=+\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9=\lim\limits_{n\to+\infty}-2n^5=\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n}{3n}=\frac{9}{3}=3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

(5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2}{3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\times2\times n\times n}{3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2\times n=+\infty$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

(6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$

(7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2}{14n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n\times n}{14n\times n\times n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$

(8 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}4n=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

تمرين4 : محلول في دفتر الدروس :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 8 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + 2$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : 5
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1} = 5\times u_0 + 8 = 5\times 4 + 8 = 28$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 + 2 = 4 + 2 = 6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 + 2 = 28 + 2 = 30$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+2}{u_n+2} = \frac{5u_n+8+2}{u_n+2} = \frac{5u_n+10}{u_n+2} = \frac{5(u_n+2)}{u_n+2} = 5 = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $v_0 = 6$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول v_0

فان: $v_n = v_0 \times q^n$ أي: $v_n = 6\times(5)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

4) لدينا: $v_n = u_n + 2$ اذن: $u_n = v_n - 2$ أي: $u_n = 6\times(5)^n - 2$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\times(5)^n = +\infty$: لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n = 0$ $1 < q = 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\times(5)^n - 2 = +\infty$

تمرين5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الأجوبة 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1} = \frac{1}{4}\times u_0 + 2 = \frac{1}{4}\times(-1) + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$ اذن : $u_1 = \frac{7}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 - \frac{8}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$ و نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{19}{3}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{8}{3}\right)}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{1}{4} = q$ اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{11}{3}$

3) كتابة v_n بدلالة n: بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 فان: $v_n = v_0 \times q^n$ أي: $v_n = -\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) استنتاج u_n بدلالة n لدينا: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$ اذن: $u_n = v_n + \frac{8}{3}$ أي: $u_n = -\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ $-1 < a = \frac{1}{4} < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$

تمرين6 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 10$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1} = \frac{1}{2}\times u_0 + 5 = \frac{1}{2}\times 4 + 5 = 2 + 5 = 7$ اذن : $u_1 = 7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1} = \frac{1}{2}\times u_1 + 5 = \frac{1}{2}\times 7 + 5 = \frac{7}{2} + \frac{10}{2} = \frac{17}{2}$ اذن : $u_2 = \frac{17}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 - 10 = 4 - 10 = -6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 - 10 = 7 - 10 = -3$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 5 - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 5}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{10}{2}}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 10)}{u_n - 10} = \frac{1}{2} = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -6$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -6$ فان: $v_n = (-6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n = u_n - 10$ اذن: $v_n + 10 = u_n$ أي: $u_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$: لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ولأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 = 0 + 10 = 10$