الأستاذ: نجيب عثماني

أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية

شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

المادة: الرياضيات

تمارين بحلول في درس المتتاليات

تمرين1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...$

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , ...$

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...$

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , ...$

$1, 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , ...$

الأجوبة:1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18$

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , -15 , -18 , 21 , -24$

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , 729 , 2187 , 6561 , 19683$

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , \frac{1}{64} , \frac{1}{128} , \frac{1}{256} , \frac{1}{512}$

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2n+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

الأجوبة:1) $u_0 = 2\times 0+3 = 3$

2) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$

$u_2 = 2\times 2+3 = 4+3 = 7$ و $u_3 = 2\times 3+3 = 9$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

تمرين3: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) أحسب حدها الأول u_0 و أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

2) أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ماذا تستنتج ؟

الأجوبة:1) $u_0 = 2\times 0-1 = 0-1 = -1$

$u_1 = 2\times 1-1 = 2-1 = 1$

$u_2 = 2\times 2-1 = 4-1 = 3$

$u_3 = 2\times 3-1 = 6-1 = 5$

(2

$u_{n+1}-u_n = (2(n+1)-1)-(2n-1) = (2n+2-1)-(2n-1)$

اذن: $= (2n+2-1)-(2n-1) = (2n+1)-(2n-1) = 2n+1-2n+1$

$u_{n+1}-u_n = 2 = r$

ومنه أستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$u_n = 5n+6 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

أحسب : $u_{n+1}-u_n$ و ماذا تستنتج ؟

الأجوبة:

$u_{n+1}-u_n = (5(n+1)+6)-(5n+6) = (5n+5+6)-(5n+6)$

اذن: $= (5n+11)-(5n+6) = 5n+11-5n-6$

$u_{n+1}-u_n = 5 = r$

أستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي حسابية أساسها $r = 5$:

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $u_n = \frac{n+3}{4}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

الجواب : $u_{n+1}-u_n = \frac{(n+1)+3}{4} - \frac{n+3}{4} = \frac{1}{4} = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $\frac{1}{4} = r$

وحدها الأول : $u_0 = \frac{3}{4}$

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$u_n = 2n+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب : $u_{n+1}-u_n$

2. ماذا تستنتج ؟

الجواب :

$u_{n+1}-u_n = (2(n+1)+3)-(2n+3) = (2n+2+3)-(2n+3)$

$= (2n+2+3)-(2n+3) = (2n+5)-(2n+3) = 2n+5-2n-3$

اذن : $u_{n+1}-u_n = 2 = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

تمرين7 :

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ و حدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

الجواب:1) $S_1 = u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30} = (30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1 = (28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $u_0=1$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و: $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

(2 $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

ومنه نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$ و: $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي:

$$S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$$

تمرين8 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n=3n+1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq0}$ حسابية
2. أحسب المجموع : $S_6=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

الجواب : (1 $u_{n+1}-u_n=(3(n+1)+1)-(3n+1)=(3n+3+1)-(3n+1)=3$

اذن : $u_{n+1}-u_n=3=r$ ومنه $(u_n)_{n\geq0}$ حسابية

(2 $S_6=u_1+u_2+\cdots+u_6=(6-1+1)\frac{u_1+u_6}{2}$

$S_6=(6)\frac{u_1+u_6}{2}=3(u_1+u_6)$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=1$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)3$ أي: $u_n=1+3n$

ومنه نحسب: $u_1=1+3\times1=4$ و $u_6=1+3\times6=19$

وبالتالي: $S_6=3(4+19)=3\times23=69$

تمرين9 : نعتبر متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq0}$ أساسها : $r=2$

وحدها الأول $u_0=3$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. أكتب u_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_6=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{10}$

الجواب : (1 $u_1=u_0+r=3+2=5$

$u_2=u_1+r=5+2=7$

$u_3=u_2+r=7+2=9$

(2 وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=3+2(n-0)$ أي: $u_n=2n+3$

(3 $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

$S_6=11\frac{u_0+u_{10}}{2}=\frac{11}{2}(3+u_{10})$

ومنه نحسب: $u_{10}=2\times10+3=23$

وبالتالي: $S=\frac{11}{2}(3+23)=\frac{11}{2}\times26=11\times13=143$

تمرين10 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times3^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ماذا تستنتج ؟

الجواب : (1

$u_0=2\times3^0=2\times1=2$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q=3$

وحدها الأول $u_0=2$

تمرين11 : نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

الجواب : (1 $u_0=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^0=3\times1=3$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\left(\frac{2}{5}\right)^1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{2}{5}=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}=q$

وحدها الأول $u_0=3$

تمرين12 : نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=81$ وأساسها : $q=\frac{1}{3}$

1. أكتب u_n بدلالة n
2. أحسب u_1 و u_2 و u_3
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=1$

الأجوبة : (1 نعلم أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0=81$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ ومنه: $u_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2 $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$

و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$ و $u_3=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{81}{27}=3$

3) $u_n=1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n}=1$ يعني

$\frac{81}{3^n}=1$ يعني $81=3^n$ يعني $n=4$

تمرين13: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول

$u_0=5$ و $u_3=40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q=2$
2. أكتب u_n بدلالة n
3. أحسب u_4
4. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=160$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3=u_0q^{3-0}$ يعني $40=5q^3$ يعني $q^3=\frac{40}{5}$ يعني :

$q^3=8$ يعني $q=2$.

2) $u_n=5\times(2)^n$

3) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$ و

$u_4=5\times(2)^4=5\times16=80$

4) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$ و

$u_5=2\times u_4=2\times80=160$

ومنه : $n=5$

تمرين14: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة التالية

: $u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5$

الجواب: 1)

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times u_n}{u_n}=3=q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

2) $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي:

$u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5=u_1\times\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=u_1\times\frac{1-q^5}{1-q}$

نحسب: u_1

$u_1=3^{1+1}=3^2=9$

$S_n=9\times\frac{1-3^5}{1-3}=9\times\frac{1-3^5}{-2}=9\times\frac{1-243}{-2}=9\times\frac{-242}{-2}=1029$

تمرين15 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية :

$\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0

فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+3=2\times1+3=2+3=5$

اذن : $u_1=5$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+3=2\times5+3=10+3=13$

اذن : $u_2=13$

نعوض n ب 2

فنجد : $u_{2+1}=2\times u_2+3=2\times13+3=26+3=29$

اذن : $u_3=29$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعية

تمرين16: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=2u_n+2\\u_0=2\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة

كالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n+2$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n

الجواب: 1) نعوض n ب 0

فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+2=2\times2+3=4+3=7$

اذن : $u_1=7$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+2=2\times7+2=14+2=16$

اذن : $u_2=16$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+2=2+2=4$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+2=7+2=9$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+2}{u_n+2}=\frac{2u_n+2+2}{u_n+2}=\frac{2u_n+4}{u_n+2}=\frac{2(u_n+2)}{u_n+2}=2=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=4$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=4$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=4\times2^n$

4) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+2$ اذن: $v_n-2=u_n$

أي: $u_n=4\times2^n-2$

تمرين17: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}\\u_0=3\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي: $v_n = u_n + 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

الجواب:(1 نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times3-3=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

اذن : $u_1=-\frac{3}{2}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-3=\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}$ اذن : $u_2=-\frac{9}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+1=3+1=4$.

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+1}{u_n+1}=\frac{\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}+1}{u_n+1}=\frac{\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}}{u_n+1}=\frac{\frac{1}{2}(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{1}{2}=q$

تمرين18: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n-1\\ u_0=-1\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n=u_n-2$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:(1 نعوض n ب0 فنجد:

$u_{0+1}=\frac{3}{2}\times u_0-1=\frac{3}{2}\times(-1)-1=-\frac{3}{2}-1=-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=-\frac{5}{2}$ اذن : $u_1=-\frac{5}{2}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{3}{2}\times u_1-1=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1=-\frac{15}{4}-1=-\frac{15}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{19}{4}$ اذن : $u_2=-\frac{15}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-2=-1-2=-3$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=-\frac{5}{2}-2=-\frac{5}{2}-\frac{4}{2}=-\frac{9}{2}$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-1-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-3}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}(u_n-2)}{u_n-2}=\frac{3}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=-3$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+1$ اذن: $v_n-1=u_n$

أي: $u_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

(4 $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

$$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

لدينا: $v_n=u_n-2$ اذن: $v_n+2=u_n$ أي: $u_n=-3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2$

فان: $v_n=(-3)\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

تمرين19: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n+6$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:(1 نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0-3=\frac{1}{2}\times2-3=1-3=-2$ اذن : $u_1=-2$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1-3=\frac{1}{2}\times(-2)-3=-1-3=-4$ اذن : $u_2=-\frac{15}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+6=2+6=8$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+6=-2+6=4$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+6}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n-3+6}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+3}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+\frac{6}{2}}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}(u_n+6)}{u_n+6}=\frac{1}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0=8$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0=8$ فان: $v_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+6$ اذن: $u_n=v_n-6$ أي: $u_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$

تمرين20 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1 \\ u_0=10 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:1) نعوض nب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times u_0+1=\frac{2}{3}\times10+1=\frac{20}{3}+1=\frac{20}{3}+\frac{3}{3}=\frac{23}{3}$ اذن :

$u_1=\frac{23}{3}$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=\frac{2}{3}\times u_1 1=\frac{2}{3}\times\frac{23}{3}+1=\frac{46}{9}+1=\frac{46}{9}+\frac{9}{9}=\frac{55}{9}$ ا

ذن : $u_2=\frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-3=10-3=7$

نعوض n ب 1

فنجد : $v_1=u_1-3=\frac{23}{3}-3=\frac{23}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14}{3}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n+1-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n-2}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}(u_n-3)}{u_n-2}=\frac{2}{3}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=7$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

وحدها الأول $v_0=7$

فان: $v_n=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-3$ اذن: $u_n=v_n+3$ أي: $u_n=7\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$