ملخصي وقواعدي في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

ملخص درس الدوال اللوغاريتمية

❖ **تعريف:**

■ توجد دالة تسمى دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):ln'(x)=\frac{1}{x}$

■ دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1)=0$.

❖ **خاصيات جبرية:**

$(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)\ ln(ab)=ln(a)+ln(b)$

$ln\left(\frac{1}{b}\right)=-ln(b)$ و $ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln(a)-ln(b)$ $\quad ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}ln(a)$

$(\forall n\in\mathbb{Z})\ ln(a^n)=n\,ln(a)$

مثال : إذا علمت أن $ln(2)\simeq 0,7$ و $ln(3)\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي: $ln(6)$ $ln(8)$ $ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $ln(\sqrt{2})$ $ln(\sqrt{6})$

الحل: $ln(6)=ln(2\times3)=ln(2)+ln(3)\simeq0,7+1,1\simeq1,8$

$ln(8)=ln(2\times2\times2)=ln(2^3)=3ln(2)\simeq3\times0,7\simeq2,1$

و $ln\left(\frac{3}{2}\right)=ln(3)-ln(2)\simeq1,1-0,7\simeq0,4$

$ln\left(\frac{1}{2}\right)=-ln(2)\simeq-0,7$

$ln(\sqrt{6})=\frac{1}{2}ln(6)\simeq\frac{1}{2}\times1,8\simeq0,9$

❖ **النهايات: الخاصية 1:** $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

مثال : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}2\ln(x)+1$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 3) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}$

الجواب: 1) $\lim_{x\to+\infty}2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن: $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$

3) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{-\infty}=0^-$ لأن: $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

❖ **جدول تغيرات الدالة** $x\to\ln(x)$:

لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):ln'(x)=\frac{1}{x}$

بما أن $x>0$ فان $(\forall x\in]0,+\infty[):ln'(x)=\frac{1}{x}>0$

و بالتالي الدالة ln تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b\ (\forall a>0)(\forall b>0)$

و $\ln(a)>\ln(b)\Leftrightarrow a>b\ (\forall a\succ0)(\forall b\succ0)$

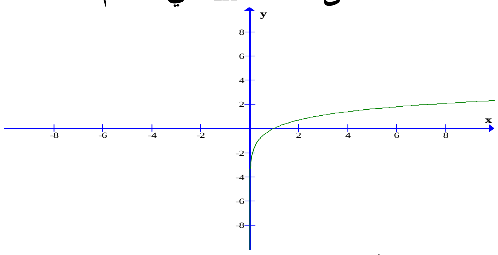
لأن الدالة ln تزايدية قطعا.

العدد : e : $e\simeq 2,7$ و e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$ ولدينا: $(\forall n\in\mathbb{Z})\ ln(e^n)=n\,ln(e)=n$

أمثلة: 1) $\ln(e^7)=7$ و $\ln(e^3)=3$

2) حل المعادلة $\ln(x)=7$ يعني $x=e^7$

❖ **منحنى الدالة ln في معلم متعامد ممنظم**



❖ **تطبيق خاصيات اللوغاريتم النبيري:**

المعادلات: مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=0$ 2) $\ln(x)=1$ 3) $\ln(x)=7$ 4) $\ln(x+1)=\ln(3)$ 5) $\ln(x)(\ln(x)-1)=0$

الحل: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

1) يجب أن يكون $x\succ0$ في المعادلة $\ln(x)=0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x)=0$ تكافئ $\ln(x)=\ln(1)$ و منه $x=1$ و بما أن $1\in]0,+\infty[$ ومنه فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{1\}$

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e)$ أي $x=e$ و بما أن $e\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e^7)$ أي $x=e^7$ و بما أن $e^7\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e^7\}$.

4) يجب أن يكون $x+1>0$ أي $x>-1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1)=\ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x+1=3$ أي $x=2$ و بما أن $2\in]-1,+\infty[$ فان $S=\{2\}$

5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$\ln(x)(\ln(x)-1)=0\Leftrightarrow\ln(x)-1=0$ أو $\ln(x)=0$

يعني $\ln(x)=1$ أو $\ln(x)=0$ يعني $ln(x)=ln(e)$ أو

$ln(x)=ln(1)$ يعني $x=e$ أو $x=1$ ومنه فان $S=\{1,e\}$

دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النبيري في الصفحة2

❖ **دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبري:**

مثال1: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2\ln x-x$

1. حدد D_f وأحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
2. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ وأدرس اشارتها
3. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$
2. $f(1)=2\ln(1)-1=0-1=-1$

$f(e)=2\ln(e)-e=2-e$

$f(e^2)=2\ln e^2-e^2=4\ln e-e^2=4\times 1-e^2=4-e^2$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

4. اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.
5. لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ اذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

❖ **اللوغاريتم العشري:**

تعريف: يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

ويحقق $\log(10)=1$

مثال: علما أن $\log(2)\simeq 0,3$ أحسب $\log(20)$

$$\log(20)=\log(2\times 10)=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,3+1\simeq 1,3$$

❖ **<u>دالة اللوغاريتم العشري لها نفس خصائص دالة اللوغاريتم النبيري</u>**

ولدينا $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$

أمثلة: بسط وأحسب :

$A=\log(0,01)-\log(1000)+\log(10^6)$

$B=\log(4)+\log(25)$

الجواب: $A=\log(10^{-2})-\log(10^3)+\log(10^6)$

$A=-2\log(10)-3\log(10)+6\log(10)$

$A=-2-3+6=1$

$B=\log(4)+\log(25)=\log(4\times 25)=\log(100)$

$B=\log(10^2)=2\log(10)=2\times 1=2$