مذكرة رقم5 في درس الدوال اللوغاريتمية

مذكرة رقم : 5
الأستاذ : عثماني نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
1. دالة اللوغاريتم النبيري - الرمز $\ln$؛ - صيغ: $\ln ab$، $\ln\frac{1}{b}$، $\ln\frac{a}{b}$؛ $\ln\sqrt{a}$؛ $\ln a^n \quad (n\in\mathbb{Z})$؛ - دراسة وتمثيل الدالة $x\to\ln x$؛	- التمكن من الحساب على اللوغاريتمات النبيرية والعشرية؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية بسيطة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للوغاريتم عدد حقيقي موجب قطعا أو تحديد قيمة مقربة لعدد لوغاريتمه معلوم؛	- دالة اللوغاريتم هي الدالة الأصلية للدالة $x\to\frac{1}{x}$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1؛ - نقبل في هذا المستوى أن $\lim\limits_{+\infty}\ln x=+\infty$ و أن $\lim\limits_{0^+}\ln x=-\infty$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ كما تقبل صيغة الدالة المشتقة لدالة اللوغاريتم النبيري.
2. اللوغاريتم العشري	- التمكن من نهايتي دالة اللوغاريتم النبيري عند محدات حيز تعريفها؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على دالة اللوغاريتم النبيري	

I. تعريف:

▪ توجد دالة تسمى دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\frac{1}{x}$

▪ دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1)=0$.

II. خاصيات جبرية:

$(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)\ \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ $\quad \ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$ $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ $\quad \ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$

$(\forall n\in\mathbb{Z})\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$

مثال : إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(3)\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي: $\ln(6)$ $\quad\ln(4)$ $\quad\ln(8)$ $\quad\ln(72)$ $\quad\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $\quad\ln\left(\sqrt{2}\right)$ $\quad\ln\left(\sqrt{6}\right)$ $\quad\ln\left(3\sqrt{2}\right)$

الحل $\ln(6)=\ln(2\times3)=\ln(2)+\ln(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$

$\ln(4)=\ln(2\times2)=\ln\left(2^2\right)=2\ln(2)\simeq 2\times0,7\simeq 1,4$

$\ln(8)=\ln(2\times2\times2)=\ln\left(2^3\right)=3\ln(2)\simeq 3\times0,7\simeq 2,1$

$\ln(72)=\ln(9\times8)=\ln(9)+\ln(8)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)$ $\quad \ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(2)\simeq\frac{1}{2}\times0,7\simeq 0,35$

$\ln(72)=\ln\left(3^2\times2^3\right)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)=2\ln(3)+3\ln(2)$

$\ln(72)\simeq 2\times1,1+3\times0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$ و $\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln(3)-\ln(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$ $\quad \ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)\simeq -0,7$

$\ln\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}\ln(6)\simeq\frac{1}{2}\times1,8\simeq 0,9$ $\quad \ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$

تمرين1:1) إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(5)\simeq 1,6$ فاحسب ما يلي: $\ln(10)$ $\quad\ln(25)$ $\quad\ln(16)$ $\quad\ln(125)$ $\quad\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ $\quad\ln\left(\sqrt{5}\right)$ $\quad\ln\left(2\sqrt{5}\right)$

2)تحقق أن : $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$

الحل:1) $\ln(10)=\ln(2\times5)=\ln(2)+\ln(5)$

$\simeq 0,7+1,6\simeq 2,3$

$\ln(25)=\ln(5\times5)=\ln\left(5^2\right)\simeq 2\ln(5)\simeq 2\times1,6\simeq 3,2$

$\ln(16)=\ln(2\times2\times2\times2)=\ln\left(2^4\right)=4\ln(2)\simeq 4\times0,7\simeq 2,8$

$\ln(125)=\ln(5\times5\times5)=\ln\left(5^3\right)=3\ln(5)\simeq 4\times1,6\simeq 6,4$

$\ln\left(\frac{1}{5}\right)=-\ln(5)\simeq -1,6$ $\quad \ln\left(\frac{2}{5}\right)=\ln(2)-\ln(5)\simeq 0,7-1,6\simeq -0,9$

$= 0,7 + \frac{1}{2}(1,6)\ \ln\left(\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\ln(5) \simeq \frac{1}{2}\times 1,6 \simeq 0,8$

$\ln\left(2\sqrt{5}\right) = \ln(2) + \ln\left(\sqrt{5}\right) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(5) = 0,7 + 0,8 = 1,5$

(2 $2\ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 0$????

$2\ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 2\ln 2^2 - \ln(2) - \ln\left(2^3\right)$

$= 2\times 2\ln 2 - \ln(2) - 3\ln(2) = 4\ln 2 - \ln(2) - 3\ln(2) = 0$

تمرين2: بسط

1. $A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15)$
2. $B = \ln(0,01) - \ln(1000) + \ln\left(10^6\right)$

الجواب: (1 $A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) = \ln(3) - \ln(5) + \ln(3\times 5)$

$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln 3 + \ln 5 = 2\ln(3) = \ln\left(3^2\right) = \ln(9)$

$B = \ln\left(10^{-2}\right) - \ln\left(10^3\right) + \ln\left(10^6\right) = -2\ln(10) - 3\ln(10) + 6\ln(10)$

$B = \ln(10) = \ln(2\times 5) = \ln 2 + \ln 5$

تمرين3: إذا علمت أن $\ln(2) \simeq 0,7$ و $\ln(11) \simeq 2,4$ فاحسب ما يلي:

$\ln(22)$ $\ln(121)$ $\ln(32)$ $\ln(44)$ $\ln\left(\frac{11}{2}\right)$

الحل $\ln(22) = \ln(2\times 11) = \ln(2) + \ln(11) \simeq 0,7 + 2,4 \simeq 3,1$

$\ln(121) = \ln(11\times 11) = \ln\left(11^2\right) = 2\ln(11) \simeq 2\times 2,4 \simeq 4,8$

$\ln(32) = \ln(2\times 2\times 2\times 2\times 2) = \ln\left(2^5\right) = 5\ln(2) \simeq 5\times 0,7 \simeq 3,5$

$= \ln\left(3^2\right) + \ln\left(2^3\right)$

$\ln(44) = \ln(4\times 11) = \ln(4) + \ln(11) = 2\ln(2) + \ln(11)$

$\ln(44) \simeq 2\times 0,7 + 2,4 \simeq 1,4 + 2,4 \simeq 3,8$

$\ln\left(\frac{11}{2}\right) = \ln(11) - \ln(2) \simeq 2,4 - 0,7 \simeq 1,7$

III. النهايات:

تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ **الخاصية 2:** $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

مثال : أحسب النهايات التالية : (1 $\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) + 1$ (2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ (3 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}$

الجواب: (1 $\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) + 1 = 2\times(+\infty) + 1 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

(2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2$

(3 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$ لأن : $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

IV. جدول تغيرات الدالة $x \to \ln(x)$:

لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$

بما أن $x > 0$ فان $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

و بالتالي الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b\ (\forall a > 0)(\forall b > 0)$ و $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b\ (\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$ لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا.

العدد : e : $e \simeq 2,71828\cdots$ و e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$.

ولدينا: $(\forall n \in \mathbb{Z})\, l\,n(e^{n}) = nl\,n(e) = n$

أمثلة: 1) $\ln(e^{3}) = 3$ و $7 = \ln(e^{7})$

2)حل المعادلة $\ln(x) = 7$ يعني $x = e^{7}$

تمرين 4: أحسب وبسط :

$A = \ln(e^{2}) + \ln(e^{4}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ $\quad B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^{9})$

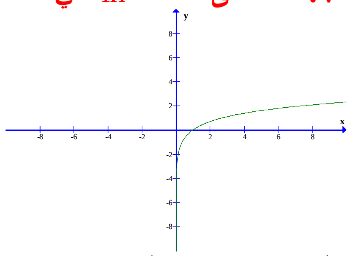
الجواب:1) $A = \ln(e^{2}) + \ln(e^{4}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln(e) + 4\ln(e) - -\ln(e)$

$A = 2\times1 + 4\times1 - -1 = 7$

$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^{9}) = 2\times\frac{1}{2}\ln(e) + \ln e + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3}9\ln(e)$

$B = 1\ln(e) + \ln e + \frac{1}{2}\ln(e) - 3\ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

V. منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x) = 0$ 2) $\ln(x) = 1$ 3) $\ln(x) = 7$ 4) $\ln(x+1) = \ln(3)$ 5) $\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$ 6) $(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0$

الحل: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x > 0$.

1) يجب أن يكون $x \succ 0$ في المعادلة $\ln(x) = 0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x) = 0$ تكافئ $\ln(x) = \ln(1)$ و منه $x = 1$ و بما أن $1 \in]0,+\infty[$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1\}$

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e)$ أي $x = e$ و بما أن $e \in]0,+\infty[$ فان $S = \{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e^{7})$ أي $x = e^{7}$ و بما أن $e^{7} \in]0,+\infty[$ فان $S = \{e^{7}\}$.

4) يجب أن يكون $x + 1 > 0$ أي $x > -1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1) = \ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x + 1 = 3$ أي $x = 2$ و بما أن $2 \in]-1,+\infty[$ فان $S = \{2\}$

5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0$ أو $\ln(x) = 0$

يعني $\ln(x) = 1$ أو $\ln(x) = 0$ يعني $l\,n(x) = l\,n(e)$ أو $l\,n(x) = l\,n(1)$ يعني $x = e$ أو $x = 1$ ومنه فان $S = \{1, e\}$

6) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$ أو $\ln x + 1 = 0$ يعني $\ln(x) = 1$ أو $\ln x = -1$ يعني $l\,n(x) = l\,n(e)$ أو $l\,n(x) = -l\,n(e)$

يعني $x = e$ أو $l\,n(x) = l\,n\left(\frac{1}{e}\right)$ يعني $x = e$ أو $x = \frac{1}{e}$ ومنه فان $S = \left\{\frac{1}{e}, e\right\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري:

دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبري:

مثال1: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \ln x + 1$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ و ادرس اشارة المشتقة

4. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. أعط جدول تغيرات الدالة f.

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1)=\ln(1)+1=1$

$f(e)=\ln(e)+1=1+1=2$

$f(e^2)=\ln e^2+1=2\ln e+1=2\times1+1=3$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)+1=-\ln e+1=-1+1=0$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(\ln(x)+1)' =(\ln(x))'+(1)'=\frac{1}{x}>0$$

لأن x موجب قطعا.

4. حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5. ومنه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

مثال2: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2\ln x-x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

4. ادرس اشارة مشتقة الدالة

5. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1)=2\ln(1)-1=0-1=-1$

$f(e)=2\ln(e)-e=2-e$

$f(e^2)=2\ln e^2-e^2=4\ln e-e^2=4\times1-e^2=4-e^2$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

4. اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.

5. لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ اذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

تمرين5: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\ln x+x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

4. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أجوبة :1)مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2) $f(1)=\ln(1)+1=0+1=1$ و $f(e)=\ln(e)+e=1+e$

$f(e^2)=\ln e^2+e^2=2\ln e+e^2=2\times1+e^2=2+e^2$

3)حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x+x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x+x=+\infty$

VI. اللوغاريتم العشري :

تعريف:يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

ويحقق $\log(10)=1$

مثال: علما أن $\log(2)\simeq0,3$ أحسب $\log(20)$

$$\log(20)=\log(2\times10)=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq0,3+1\simeq1,3$$

خاصيات هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

1. $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$
2. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
3. $(\forall a\succ0):\log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log(b)$
4. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
5. $(\forall a\succ0)(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(a^n)=n\log(a)$
6. $(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(10^n)=n$
7. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log(a)=\log(b)\Leftrightarrow a=b$
8. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log(a)\succ\log(b)\Leftrightarrow a\succ b$

تمرين6:بسط و أحسب :

$A=\log(0,01)-\log(1000)+\log(10^6)$

$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$

$C=\log(4)+\log(25)$

$D=1+2\log2-\log(40)$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2$

الجواب: $A=\log(10^{-2})-\log(10^3)+\log(10^6)$

$A=-2\log(10)-3\log(10)+6\log(10)$

$A=-2-3+6=1$

$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$

$B=1+2\log(10^2)+\log(10^4)=1+2\times2+4\log(10)=1+4+4$ ومنه $B=9$

$C=\log(4)+\log(25)=\log(4\times25)=\log(100)$

$C=\log(10^2)=2\log(10)=2\times1=2$

$D=1+2\log2-\log(40)=1+\log2^2-(\log(4\times10))$

$D=1+l\,og\,2^2-(l\,og\,4+l\,og10)=1+l\,og\,4-l\,og\,4-l\,og10$

$D=1+l\,og\,4-l\,og\,4-1=0$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2=\log(9\times100)-2\log(3)-2$

$E=\log9+\log100-2\log(3)-2$

$E=\log3^2+\log10^2-2\log(3)-2=2\log3+2\log10-2\log(3)-2$ ومنه $E=2\log10-2=2\times1-2=0$

تمرين7: علما أن $\log(3) \simeq 0,47$ و $\log(5) \simeq 0,7$

أحسب $\log(15)$ و $\log(\sqrt{5})$ و $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ و $\log(50)$ و $\log(300)$

أجوبة :
$\log(15) = \log(5\times3) = \log(5) + \log(3) \simeq 0,7 + 0,47 \simeq 1,17$

$$\log(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\log(5) \simeq \frac{1}{2}\times 0,7 \simeq 0,35$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3) \simeq -0,47$$

$$\log(50) = \log(5\times10) = \log(5) + \log(10) \simeq 0,7 + 1 \simeq 1,7$$

$$\log(300) = \log(3\times100) = \log(3) + \log(100) \simeq 0,47 + 2 \simeq 2,47$$