المادة: الرياضيات

ملخص لدرس اللوغاريتم النبيري

مستوى:السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

1) تعريف:

- دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$

على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1.

و لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[): \ln'(x) = \frac{1}{x}$

- دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1) = 0$.

2) النهايات: تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

الخاصية 2: $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

3) خاصية جبرية:

1. $(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$
2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
6. $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(a^n) = n\ln(a)$

تطبيق الخاصية 1:

لدينا $\ln(2) \simeq 0,7$

و $\ln(3) \simeq 1,1$

اذن:

$\ln(6) = \ln(2 \times 3)$

$= \ln(2) + \ln(3)$

$\simeq 0,7 + 1,1 \simeq 1,8$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النبيري:

مثال : إذا علمت أن $\ln(2) \simeq 0,7$ و $\ln(3) \simeq 1,1$ فاحسب ما يلي:

$$\ln\left(\frac{8}{12}\right) \qquad \ln(72) \qquad \ln(\sqrt{6}) \qquad \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \ln(3\sqrt{2})$$

الحل:

$$\ln\left(\frac{8}{12}\right) = \ln\left(\frac{2 \times 4}{3 \times 4}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= \ln(2) - \ln(3)$$
$$= 0,7 - 1,1 = -0,4$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

$$\boxed{72 = 9 \times 8}$$

$$\ln(72) = \ln(9 \times 8) = \ln(9) + \ln(8)$$

$$= \ln(3^2) + \ln(2^3)$$
$$= 2\ln(3) + 3\ln(2)$$
$$= 2\times(1,1) + 3\times(0,7)$$
$$= 2,2 + 2,1 = 4,3$$

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

$$\boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)}$$

$$\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)}$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\ln(6) = \frac{1}{2}\ln(2\times 3)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(2) + \ln(3)) = \frac{1}{2}(0,7 + 1,1)$$
$$= \frac{1}{2}(1,8) = 0,9$$

$$\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2))$$
$$= \frac{1}{2}(1,1 - 0,7) = \frac{1}{2}\times 0,4 = 0,2$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2})$$
$$= \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(2)$$
$$= 1,1 + \frac{1}{2}(0,7)$$
$$= 1,1 + 0,35 = 1,45$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \end{array}}$$

4) جدول تغيرات الدالة $x \to \ln(x)$:

لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$

بما أن $x \succ 0$ فإن $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x} \succ 0$

و بالتالي الدالة ln تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0		$+\infty$
f'	||	+	
f(x)	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

$(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$
$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
$(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$
$\ln(a) \succ \ln(b) \Leftrightarrow a \succ b$
$\ln(a) \prec \ln(b) \Leftrightarrow a \prec b$
لأن الدالة ln تزايدية قطعا.

5) العدد e : $e \simeq 2,71828\cdots$

← e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e) = 1$.

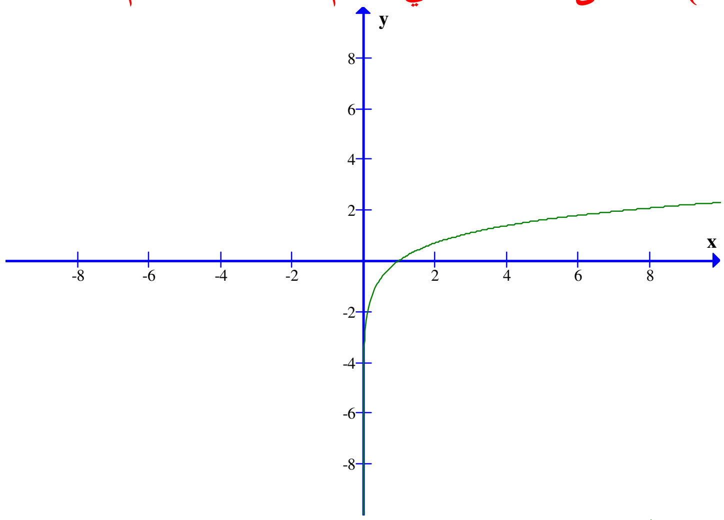
← بتطبيق الخاصية الخامسة على العدد e

نحصل على: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ln(e^n) = n\ln(e)$

أي: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ln(e^n) = n$

$\ln(e^3) = 3$
$\ln(e^4) = -4$
حل المعادلة $\ln(x) = 7$
هو العدد $x = e^7$

6) منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



ملاحظات:

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(1,0)$ هي:

$$y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)$$

أي: $y=x-1$

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(e,0)$ هي:

$$y=\ln'(e)(x-e)+\ln(e)$$

أي: $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$

أي: $y=\frac{1}{e}x$

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$
$$\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$$
$$\ln(1)=0$$
$$\ln'(e)=\frac{1}{e}$$
$$\ln(e)=1$$

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]0,1[$ و هذا يعني أن $(\forall x\in]0,1[):\ln(x)\prec 0$.

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]1,+\infty[$ و هذا يعني أن $(\forall x\in]1,+\infty[):\ln(x)\succ 0$.

7) اللوغاريتم العشري:

تعريف:

يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

لاحظ أن $\ln(10)\neq 1$
في حين $\log(10)=1$

خاصيات هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

1. $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$
2. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
3. $(\forall a\succ 0):\log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log(b)$
4. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
5. $(\forall a\succ 0)(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(a^n)=n\log(a)$
6. $(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(10^n)=n$
7. $(\forall x\in]0,+\infty[):\log'(x)=\frac{1}{x\ln(10)}$

تطبيق الخاصية 2:

نريد حساب $\log(20)$

علما أن $\log(2)\simeq 0,30103$

$$\log(20)=\log(2\times 10)$$
$$=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,30103+1$$
$$\simeq 1,30103$$

.8 $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$

.9 إذا كان $10^c \le x \prec 10^{c+1}$ فان $c \le \log(x) \prec c+1$

.10 $(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0) : \log(a) = \log(b) \Leftrightarrow a = b$

.11 $(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0) : \log(a) \succ \log(b) \Leftrightarrow a \succ b$

نضع: $x = 104,27$
لدينا: $100 \le x \le 1000$
أي: $10^2 \le x \prec 10^3$
إذن: $2 \le \log(x) \prec 3$
أي: $\log(x) \simeq 2,\cdots\cdots$

جدول تغيرات دالة اللوغاريتم العشري:

x	0	$+\infty$
f'	||	+
f(x)	|| $-\infty$	↗ $+\infty$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النبيري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x) = 0$ 2) $\ln(x) = 1$ 3) $\ln(x) = 7$

4) $\ln(x+1) = \ln(3)$ 5) $\ln(x-1) = \ln(2x+3)$ 6) $\ln(x) + \ln(4-x) = \ln(6-x)$

الحل:

1) يجب أن يكون $x \succ 0$ في المعادلة $\ln(x) = 0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x) = 0$ تكافئ $\ln(x) = \ln(1)$

و منه $x = 1$ و بما أن $1 \in]0,+\infty[$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1\}$

الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x \succ 0$.

$\ln(1) = 0$.

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e)$ أي $x = e$

و بما أن $e \in]0,+\infty[$ فان $S = \{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e^7)$ أي $x = e^7$

و بما أن $e^7 \in]0,+\infty[$ فان $S = \{e^7\}$.

$7 = \ln(e^7)$
$(\forall n \in \mathbb{Z}) : \ln(e^n) = n$.

4) يجب أن يكون $x+1 \succ 0$ أي $x \succ -1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1) = \ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x+1 = 3$ أي $x = 2$

و بما أن $2 \in]-1,+\infty[$ فان $S = \{2\}$

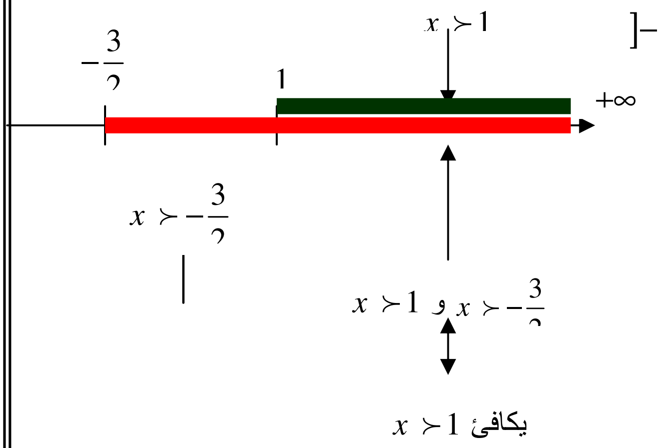
5) يجب أن يكون $x-1 \succ 0$ و $2x+3 \succ 0$

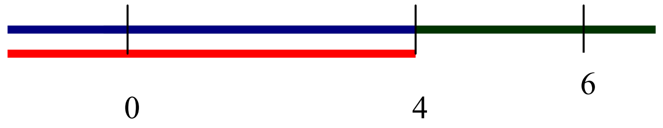
أي $x \succ 1$ و $2x \succ -3$ أي $x \succ 1$ و $x \succ -\dfrac{3}{2}$ أي $x \succ 1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x-1) = \ln(2x+3)$

هي $]1,+\infty[$ و هي تكافئ $x-1 = 2x+3$ أي $x = -4$ و $-4 \notin]1,+\infty[$

و بما أن $-4 \notin]1,+\infty[$ فان $S = \phi$





6) يجب أن يكون $x \succ 0$ و $4-x \succ 0$ و $6-x \succ 0$.
أي $x \succ 0$ و $x \prec 4$ و $x \prec 6$.
و منه مجموعة تعريف
المعادلة $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$
هي $]0,4[$ و هي تكافئ $\ln[x(4-x)]=\ln(6-x)$

$x \succ 0$ و $x \prec 4$ و $x \prec 6$ يكافئ $.0 \prec x \prec 4$

أي $x(4-x)=6-x$
أي $4x-x^2=6-x$ أي $x^2-5x+6=0$
و هذه الأخيرة معادلة من الدرجة الثانية
يتم حلها بحساب المميز Δ

$ax^2+bx+c=0$ $\downarrow$ $\Delta=b^2-4ac$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$$

لدينا $\sqrt{\Delta}=1$ و منه المعادلة $x^2-5x+6=0$
تقبل حلين مختلفين $x_1=\dfrac{5-1}{2}=2$ و $x_2=\dfrac{5+1}{2}=3$.
و بما أن $2\in\,]0,4[$ و $3\in\,]0,4[$.
فان مجموعة حلول المعادلة $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$
هي: $S=\{2,3\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النبيري: دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النبيري:

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\; f(x)=x\ln x-x+1$

1. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(4)$ و $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ علما أن $\ln(2)\simeq 0,69$ و $\ln(3)\simeq 1,1$ و $e\simeq 2,71$.
2. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.
3. أعط جدول تغيرات الدالة f.
4. حدد معادلة مماس (C_f) في 4.

الحل:

1. $f(1)=1\ln(1)-1+1=0$

$$f(e)=e\ln(e)-r+1$$
$$=e\times 1-e+1$$
$$=e-e+1=1$$

$$f(4)=4\ln(4)-4+1$$
$$=4\ln(2^2)-4+1$$
$$=8\ln(2)-3$$
$$=8\times 0,69-3=2,52$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln(3)\simeq -1,1$$

$\ln(1)=0$

$\ln(e)=1$

$\ln(2^2)=2\ln(2)$

$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)$

2. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(x\ln(x)-x+1)$$
$$=(x\ln(x))'-(x)'+(1)'$$
$$=(x)'\ln(x)+x\cdot\ln'(x)-1+0$$
$$=\ln(x)+1-1$$

$$\boxed{f'(x)=\ln(x)}$$

3. معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 4
هي: $y=f'(4)(x-4)+f(4)$
أي $y=1,38x-3$ لأن $f(4)=2,25$ و $f'(4)=1,38$.
معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 1
هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
أي $y=0$ لأن $f(1)=0$ و $f'(1)=0$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x)=2\ln(x)-x$
أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,3]$
أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم على المجال. $]0,3]$
الحل:
لدينا $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ اذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.
$f'(x)=\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{2-x}{x}$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.
و منه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0		2		3
$f'(x)$		+		-	
f(x)	$-\infty$	↗	-0,6	↘	-0,8

الأستاذ: نجيب عثماني