Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

ملخصي وقواعدي في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

ملخص درس الدوال الأسية

1)تعريف : الدالة الأسية النبيرية يرمز لها ب exp وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $(\forall x\in\mathbb{R});\exp x=e^x$

2)خاصيات: الدالة exp تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

$e^x>e^y\Leftrightarrow x>y$

$e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

ولدينا: $e^0=1$ و $e^1=e$

$(\forall y\in\mathbb{R})(\forall x\in]0;+\infty[)\ ,\ \left(x=e^y\Leftrightarrow\ln(x)=y\right)$

مثال: $x=\ln 2\Leftrightarrow e^x=2$

$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ (\forall x\in\mathbb{R});\ln\left(e^x\right)=x$

3)خاصيات جبرية: $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$

$(\forall x\in\mathbb{R})e^x>0$ و $e^x\times e^y=e^{x+y}$ و $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$

$\dfrac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ و $e^{rx}=\left(e^x\right)^r$

مثال 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{x+1}=4$ 2) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 3) $e^{1+x}=\dfrac{1}{e^{2x-3}}$ 4) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e$

الحل: 1) $e^{1-x+2x}=e^1\Leftrightarrow e^{1-x}\times e^{2x}=e$

$e^{1+x}=e^1\Leftrightarrow 1+x=1\Leftrightarrow x=0$ ومنه : $S=\{0\}$

2) $e^{x-2}=e^1\Leftrightarrow e^{x-2}=e$

$x-2=1\Leftrightarrow x=3$ ومنه : $S=\{3\}$

3) $e^{1+x}=e^{-(2x-3)}\Leftrightarrow e^{1+x}=\dfrac{1}{e^{2x-3}}$

$3x=2\Leftrightarrow 1+x=-2x+3\Leftrightarrow e^{1+x}=e^{-2x+3}\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ ومنه :

4) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e\Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x-3)}=e^1$

$e^{2x+1-x+3}=e^1\Leftrightarrow$

$x=-3\Leftrightarrow x+4=1\Leftrightarrow 2x+1-x+3=1\Leftrightarrow$

ومنه : $S=\{-3\}$

مثال2: حدد مجموعة تعريف الدالة f : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

الحل: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^x-1\neq 0\}$

$e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

مثال 3: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية:

$e^{7x-1}\geq e^{2x-3}\times e^{x-2}$

الحل: $e^{7x-1}\geq e^{2x-3+x-2}\Leftrightarrow e^{7x-1}\geq e^{2x-3}\times e^{x-2}$

$4x\geq -4\Leftrightarrow 7x-1\geq 2x-3+x-2\Leftrightarrow$

$x\geq -1\Leftrightarrow$ ومنه : $S=[-1;+\infty[$

4)النهايات : خاصية1 : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و **خاصية2 :** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

مثال: أحسب النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$

الحل: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+3}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{e^x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

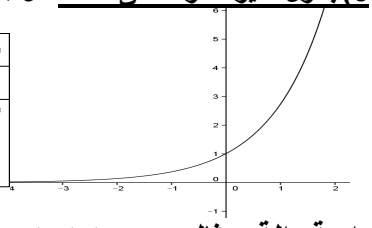
5)مشتقة الدالة. $x\mapsto e^x$

نقبل أن الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R})$: $\left(e^x\right)'=e^x$

6)جدول تغيرات ومنحنى الدالة $x\mapsto e^x$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



دراسة دالة مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=e^x+3x$

1)حدد D_f 2) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ (أعط قيمة مقربة للنتائج)

3) أحسب $f'(x)$ وأدرس اشارتها

4)أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

5) حدد جدول تغيرات الدالة f

الحل: 1) $D_f=\mathbb{R}$ 2) $f(0)=e^0+3\times 0=1-0=1$

$f(1)=e^1+3\times 1=e+3\simeq 2,7+3\simeq 5,7$

3) $f'(x)=\left(e^x+3x\right)'=\left(e^x\right)'+(3x)'=e^x+3>0$

لأن: $(\forall x\in\mathbb{R})e^x>0$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

4)أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+3x=0+3(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x+3x=+\infty+3(+\infty)=+\infty$

5)جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$