# ملخصي وقواعدي في الرياضيات

## مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

# ملخص درس الاشتقاق ودراسة الدوال

**1)اشتقاق دالة في نقطة:**

**تعريف:** نقول ان دالة $f$ قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0$ إذا وجد عدد حقيقي $\ell$ بحيث $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ والعدد $\ell$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ في النقطة $x_0$. و نكتب $\ell=f'(x_0)$

**ملاحظة:** إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ فان معادلة مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة التي أفصولها $x_0$ هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=1$.

**الجواب:**(1 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$ اذن : الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

(2 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(1)=4$

$f(1)=2$ : اذن

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-4+2$ ومنه

$y=4x-2$ وهي معادلة المماس

**2)مشتقات الدوال الاعتيادية و العمليات على الدوال المشتقة:**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $ax$ | $a$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |

| الدالة | مشتقتها |
|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $k\cdot u$ | $k\cdot u'$ |
| $u\cdot v$ | $u'v+uv'$ |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v+uv'}{v^2}$ |
| $u^n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ | $nu^{n-1}u'$ |

**أمثلة:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات

(1 $f(x)=2$ (2 $f(x)=3x-5$ (3 $f(x)=x^{10}$

**الأجوبة:** (1 $f'(x)=(2)'=0$ (2 $f'(x)=(3x-5)'=3$

(3 $f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^{10-1}=10x^9$

**مثال:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x)=3x^3-4x^2+6$ (2 $f(x)=(3x+5)\times(2x+6)$

(3 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ (4 $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ (5 $f(x)=(4x+3)^3$

**الحل:**(1 $f'(x)=\left(3x^3-4x^2+6\right)'=9x^2-4x$

(2 $f'(x)=((3x+5)\times(2x+6))'=((3x+5))'\times(2x+6)+(3x+5)\times(2x+6)'$

$f'(x)=((3x+5)\times(2x+6))'=3\times(2x+6)+(3x+5)\times 2$

$f'(x)=6x+18+6x+10=12x+28$

(3 $f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

(4 $f'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)'=\frac{(2x+3)'\times(x+1)-(2x+3)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2\times(x+1)-(2x+3)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$

(5 $f'(x)=\left((4x+3)^3\right)'=3(4x+3)^2\times(4x+3)'=3(4x+3)^2\times 4=12(4x+3)^2$

**3)رتابة دالة و إشارة مشتقتها و دراسة بعض الدوال**

**خاصية:** $I$ مجال من $\mathbb{R}$ و $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $I$.

- $f$ ثابتة على $I$ $\Leftrightarrow f'(x)=0$ لكل $x$ من $I$.
- $f$ تزايدية على $I$ $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ لكل $x$ من $I$.
- $f$ تناقصية على $I$ $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$ لكل $x$ من $I$.

**دراسة دالة حدودية: مثال 1 :**

$f$ دالة عددية معرفة ب : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

3) أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$.

4) أنشئ منحنى الدالة $f$.

**الحل:**

1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

3) $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(4)'$

$f'(x)=3x^2-3\times 2x^1+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$ $\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

**جدول إشارة $f'(x)$**

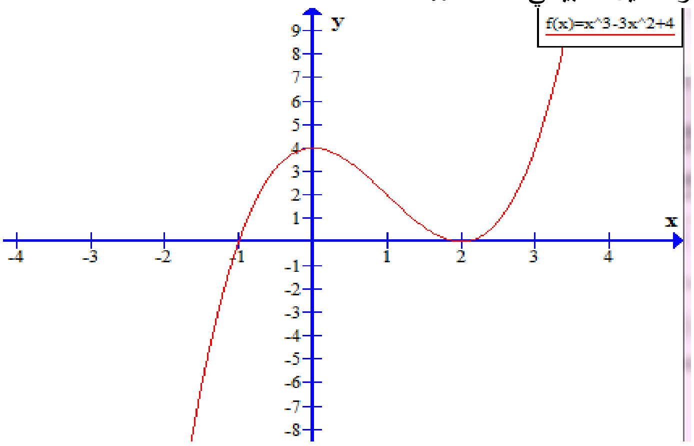
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

جدول تغيرات الدالة $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

والتمثيل المبياني للدالة $f$.




**دراسة دالة متخاطة: مثال:** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) حدد حيز تعريف الدالة $g$ 2) أحسب نهايات الدالة $g$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.

3) أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$ .

4) املأ الجدول التالي :

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | |

5) أنشئ منحنى الدالة $g$ .

**الحل:**

1) حيز تعريف الدالة $g$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3) لكل $x$ من $D$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | \|\| | $\searrow$ | $2$ |

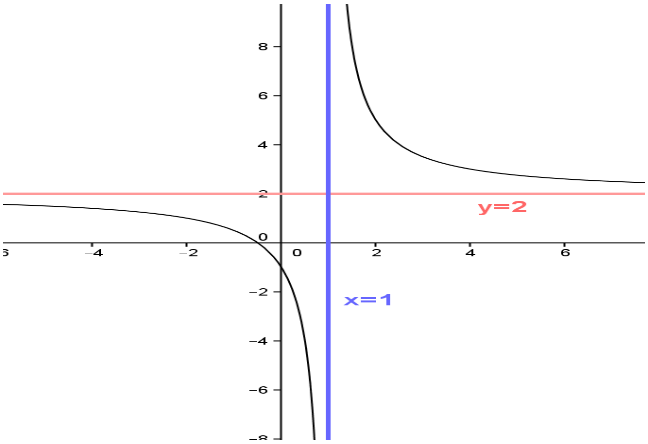
يعني: $(\forall x\in D)\,g'(x)<0$

جدول تغيرات الدالة

(4

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 1/2 | -1 | | 5 | 7/2 | 3 |

5) منحنى الدالة $g$ .




**دراسة الدالة** $x\mapsto\sqrt{ax+b}$ $(a\neq0)$ **:**

**مثال:** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{2x+4}$

1. حدد $D$ حيز تعريف الدالة $f$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة $f$.
4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$.
5. مثل مبيانيا الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم.

**الحل:(1)** $f(x)$ **معرفة إذا وفقط إذا كان** $2x+4\geq0$ **يعني**

$2x\geq-4$ **و منه** $x\geq-2$

**يعني حيز تعريف الدالة** $f$ **هو:** $D=[-2,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{4}{x}}=+\infty$$

**لأن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

**لدينا:** $(\forall x\in]-2,+\infty[)\,f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$

**بما أن** $\sqrt{2x+4}>0$ **فان:** $f'(x)>0$.

**جدول التغيرات:**

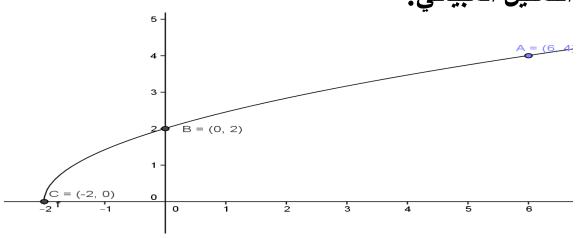
| $x$ | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**لدينا:** $f(-2)=\sqrt{2\times(-2)+4}=\sqrt{0}=0$

و $f(0)=\sqrt{2\times0+4}=\sqrt{4}=2$

و $f(6)=\sqrt{2\times6+4}=\sqrt{16}=4$

**التمثيل المبياني:**




من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي