Série des exercices 1 : Continuité d'une fonction numérique

Exercice 01 :
Calculer les limites suivantes si elles existent :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2-x+5$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2+x-7$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+1}{4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-2x\right)$

Exercice 02 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-1} & ;\ x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0=2$

Exercice 03 : On considère la fonction g, définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2-1}{1-2x} & ;\ x\geq 0 \\ g(x)=3-x^2 & ;\ x<0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de g en $x_0=0$

Exercice 04 : Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1) $f(x)=\left(x^2-5\right)^4$; $I=\mathbb{R}$ // 2) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x}$; $I=\mathbb{R}^*$

3) $f(x)=\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^2$; $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $I=]-\infty;0]$ / 5) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 05 : f est la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-3}{x-1} & ;\ si\ x<1 \\ \dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x^2-1} & ;\ si\ x>1 \\ \dfrac{5}{8} & ;\ si\ x=1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite en 1.
2) Est-ce que f est continue en 1 ?

Exercice 06 : f est la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-3}{x-2} & ;\ si\ x\neq 2 \\ m & ;\ si\ x=2 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.

Exercice 07 : 1) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans I, dans chaque cas :

a. (E) : $x^5-2x^3+x-4=0$; $I=[-1;2]$
b. (E) : $\sqrt{x^3+1}-2x=0$; $I=]0;1[$

2) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans I, dans chaque cas :

a. (E) : $x^3+5x=4$; $I=[-1;2]$
b. (E) : $x\sqrt{x}+x=1$; $I=]0;1[$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-4x^2+4x-1$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déduisez que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $]2;3[$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25.

Exercice 08 : Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^3-3x^2+1=0 \quad (E)$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution dans l'intervalle $]-1;0[$.
2) On pose $f(x)=x^3-3x^2+1$, pour $x\in\mathbb{R}$
a- Calculer $f(0)$ et $f(3)$
b- Peut-on appliquer le T.V.I sur f dans $[0;3]$?
c- Calculer $f(2)$ et en déduire que l'équation (E) admet deux autres solutions.
3) Donner un encadrement d'amplitude 0.5 dans chacune des trois solutions.

Exercice 09 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}+x^2-4$$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
2) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même.
3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ et que $1.6<\alpha<1.7$

Exercice 10 :
g est définie sur $I=[1;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+2x-4$
1) Montrer que g est continue et strictement croissante sur I.
2) En déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer vers I.
3) Déterminer $g^{-1}(x),\ \forall x\in J$.

Exercice 11 :
h est définie sur $]1;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$
1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.
2) Déterminer $h^{-1}(x),\ \forall x\in J$.