Exercice 1 : Pour chacune des fonctions f, g et h dont on donne le tableau de variation ci-dessous, indiquer le nombre de solutions de l'équation proposée, en précisant pour chacune d'elles un intervalle auquel elle appartient.

1. $f(x) = -2$

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↘	-5 ‖ -2	↘	$-\infty$

2. $g(x) = 0$

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	↗	4	↘	$-\infty$

3. $h(x) = 3$

x	$-\infty$		-4		3		5		$+\infty$
h	3	↘	-9	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α et vérifier que $\alpha \in]3{,}10;3{,}11[$
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 3 :

On considère la fonction h définie par :

$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

1. Dresser le tableau de variation de h.
2. Pour k réel donné, étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $h(x) = k$.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 8$ a une solution unique α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \sqrt{x} + x$.

1. Donner le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$, et dresser le tableau de variation de f.
2. Calculer $f(3)$ et $f(4)$. En déduire que l'équation $f(x) = 5$ admet une seule solution α. Encadrer α par deux entiers consécutifs.
3. Avec la calculatrice, déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 5 : Deux méthodes de résolution

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 112.$$

Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Première partie

a) Calculer $f'(x)$; étudier son signe.et dresser le tableau de variation de f

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions.

c) Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.

d) En déduire le signe de f.

Deuxième partie

a) Calculer $f(2)$

b) Trouver trois réels a, b et c tels que pour tout réel x : $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 6 :

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$

a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20 ; 40]$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

On prendra 1cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 20 en ordonnée.

a) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

b) Démontrer que :

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

où g est la fonction définie en 1).

c) Etudier les variations de f.

d) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à C.

e) Construire C et D sur le même graphique.

f) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 130$ et donner les valeurs approchées de chacune des solutions à l'unité près.

M. Said CHERIF : Professeur de Mathématique au Lycée Technique Maghreb Arabe OUJDA