

الثانية اقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني الاستدراكي 2017

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ لكل n من \mathbb{N}	
1. أ- أحسب u_1 و u_2	0,5
1. ب- تحقق من أن $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n + 3}$ ثم بين بالترجع أن لكل n من \mathbb{N} : $u_n > 1$	0,75
1. ج- بين أن لكل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = 2 \left(\frac{1 - u_n^2}{2u_n + 3} \right)$	0,5
1. د- استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية و أنها متقاربة	0,5
2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ لكل n من \mathbb{N}	
2. أ- تحقق أن لكل n من \mathbb{N} : $v_n \neq 1$	0,25
2. ب- أحسب v_0	0,25
2. ج- بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$	0,5
2. د- أحسب v_n بدلالة n	0,25
3. أ- بين أن $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$	0,25
3. ب- استنتج أن : $u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^n}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^n}$	0,5
3. ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0,25

التمرين الثاني : (4 ن)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأعداد 0، 1، 2 و كرتين لونهما أسود تحملان العددين 1، 2 ، كلها غير قابلة للتمييز باللمس .
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق .

1. نعتبر الحدثين A و B التاليين :

" A الكرتان المسحوبتان تحملان العدد 1 "

" B سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "

1. أ- بين أن $p(A) = \frac{1}{10}$ 0,5

1. ب- أحسب احتمال الحدث B و بين أن $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$ 1

1. ج- هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك . 0,5

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي جداء العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان .

2. أ- أنقل الجدول جانبه إلى ورقة تحريرك ثم أتمم 1,5

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$				

معللا جوابك

2. ب- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X 0,5

التمرين الثالث : (1,5 ن)

نضع : $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ و $J = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

1. أحسب I 0,5

2. أحسب $I + J$ 0,5

3. استنتج أن $J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ 0,5

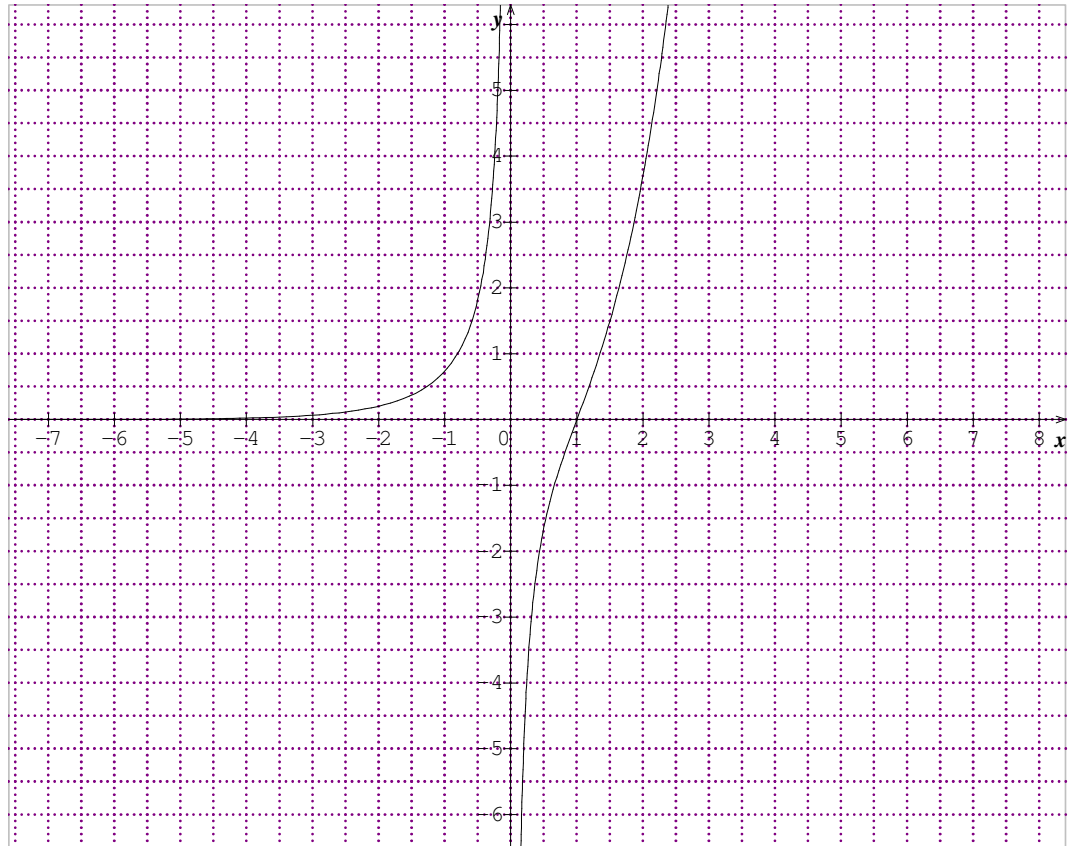
التمرين الرابع : (10 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x$ و ليكن

(C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة . 1,75

1. ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	0,75
1. ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	1,75
2. أ- بين أن لكل x من \mathbb{R}^* : $f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)}{x^2} e^x$	1
2. ب- بين أن $f'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^*	1
2. ج- استنتج منحنى تغيرات الدالة f على $]-\infty, 0[$ ثم على $]0, +\infty[$	0,5
2. د- أحسب $f(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f	1,25
3. في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المبياني للدالة f	
3. أ- أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأضلاع 1	1
3. ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$	0,5
3. ج- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x) = -2$	0,5



تصحيح التمرين الأول

$$u_1 = \frac{3u_0 + 2}{2u_0 + 3} = \frac{3(2) + 2}{2(2) + 3} = \frac{8}{7} \quad \text{1. أ.}$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 2}{2u_1 + 3} = \frac{3\left(\frac{8}{7}\right) + 2}{2\left(\frac{8}{7}\right) + 3} = \frac{\frac{38}{7}}{\frac{37}{7}} = \frac{38}{37}$$

1. ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - 1 = \frac{3u_n + 2 - 2u_n - 3}{2u_n + 3} = \frac{u_n - 1}{2u_n + 3} \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n + 3} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

✓

• من أجل $n = 0$:

$$u_0 = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$u_0 > 1 \quad \text{إذن :}$$

• ليكن $n \in \mathbb{N}$

نفترض أن $u_n > 1$

و نبين أن $u_{n+1} > 1$ ؟

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n + 3} \quad \text{لدينا :}$$

و حسب الافتراض $u_n > 1$ إذن $u_n - 1 > 0$ و $2u_n + 3 > 0$

$$\text{إذن } \frac{u_n - 1}{2u_n + 3} > 0 \quad \text{إذن } u_{n+1} - 1 > 0$$

$$\text{و منه } u_{n+1} > 1$$

• نستنتج أن $u_n > 1$ لكل n من \mathbb{N}

1. ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 2 - 2u_n^2 - 3u_n}{2u_n + 3} = \frac{2(1 - u_n^2)}{2u_n + 3} = 2 \left(\frac{1 - u_n^2}{2u_n + 3} \right) : \text{لدينا}$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \left(\frac{1 - u_n^2}{2u_n + 3} \right) : \text{إن : لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

1. د-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $u_n > 1$: إذن $1 - u_n^2 < 0$ و $2u_n + 3 > 0$

$$\text{إذن } 2 \left(\frac{1 - u_n^2}{2u_n + 3} \right) < 0$$

و منه لكل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n < 0$

و بالتالي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية

✓ بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية و مصغرة (بالعدد 1) فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

2. أ- نفترض أنه يوجد n من \mathbb{N} بحيث : $v_n = 1$

$$\text{إذن : } \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1$$

$$\text{إذن : } u_n - 1 = u_n + 1$$

$$\text{إذن } -1 = 1$$

و هذا غير ممكن

و بالتالي : لكل n من \mathbb{N} : $v_n \neq 1$

$$2. \text{ ب- } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

2. ج - ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{u_n - 1}{2u_n + 3}}{\frac{5u_n + 5}{2u_n + 3}} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 1)} = \frac{1}{5} v_n : \text{لدينا}$$

$$\text{إذن : لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$$

و منه : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

2. د- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 \cdot q^n$$

إذن : $v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

3. أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:
لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n - 1 = (u_n + 1)v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n - 1 = u_n v_n + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n - u_n v_n = 1 + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n (1 - v_n) = 1 + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

إذن : لكل n من \mathbb{N} : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3. ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ و $v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

إذن : لكل n من \mathbb{N} : $u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3. ج- بما أن $-1 < \frac{1}{5} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "
 ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = A_5^2 = 20 \text{ لدينا :}$$

1. أ- " A الكرتان المسحوبتان تحملان العدد 1 "

$$\text{card } A = A_2^2 = 2$$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

1. ب-

✓ " B سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "

$$\text{card } B = A_3^1 \times A_4^1 = 3 \times 4 = 12$$

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

✓ " $A \cap B$ الكرتان المسحوبتان تحملان العدد 1 و الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "

$$\text{card } (A \cap B) = A_1^1 \times A_1^1 = 1$$

$$p(A \cap B) = \frac{\text{card } (A \cap B)}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{20}$$

$$1. ج- لدينا : $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$ و $p(A) \times p(B) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50}$$$

بما أن $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ فإن الحدثين A و B غير مستقلين .

2. أ-

$$\begin{cases} 0, \bar{0} \\ \bar{0}, 0 \end{cases} \rightarrow X = 0$$

$$p(X = 0) = \frac{2(A_1^1 \times A_4^1)}{20} = \frac{2 \times 1 \times 4}{20} = \frac{2}{5}$$

$$1, 1 \rightarrow X = 1$$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} 1, 2 \\ 2, 1 \end{cases} \rightarrow X = 2$$

$$p(X = 2) = \frac{2(A_2^1 \times A_2^1)}{20} = \frac{2 \times 2 \times 2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$2, 2 \rightarrow X = 4$$

$$p(X = 4) = \frac{A_2^2}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

2. ب- الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(0 \times \frac{2}{5}\right) + \left(1 \times \frac{1}{10}\right) + \left(2 \times \frac{2}{5}\right) + \left(4 \times \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{13}{10}$$

تصحيح التمرين الثالث

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln|x^2+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln(2) \quad 1.$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad 2.$$

$$J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \text{ و } J = \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2) \text{ إذن } I + J = \frac{1}{2} \quad 3. \text{ لدينا :}$$

تصحيح التمرين الرابع

1. أ-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^x = +\infty \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) = 1 \text{ لأن :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^x = +\infty \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن}$$

التأويل الهندسي: (C_f) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

1.ب-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^x = 0 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي: (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$

1.ج-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^x = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{x-1}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x = 1 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^x = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x-1}{x} \right) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x = 1 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي: (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

2. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$
لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{x-1}{x} \right) e^x \right)' \\ &= \left(\frac{x-1}{x} \right)' e^x + \left(\frac{x-1}{x} \right) (e^x)' \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{x^2} e^x + \frac{x-1}{x} e^x \\ &= \frac{1}{x^2} e^x + \frac{x-1}{x} e^x \\ &= \left(\frac{1+x^2-x}{x^2} \right) e^x \\ f'(x) &= \frac{(x^2-x+1)}{x^2} e^x : \text{ إذن : لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

2. ب- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1)}{x^2} e^x \text{ لدينا}$$

ولدينا : $e^x > 0$ و $x^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - x + 1$

$$\text{لدينا : } \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0 \text{ إذن } x^2 - x + 1 > 0$$

وبالتالي : $f'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}^*

2. ج- على $]-\infty, 0[$: بما أن $f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعا

و على $]0, +\infty[$: بما أن $f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعا

2. د-

$$f(1) = \frac{1-1}{1} e^1 = 0 \text{ لدينا } \checkmark$$

\checkmark جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 1 :

$$y = f'(1).(x - 1) + f(1)$$

$$\text{لدينا : } f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = e$$

$$\text{إن : } y = e.(x - 1) + 0$$

$$\text{إن : } (T) : \boxed{y = ex - e}$$

3. ب- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ هو عدد نقط تقاطع (C_f) و المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = 2$:
المعادلة تقبل حلين .

3. ج- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ هو عدد نقط تقاطع (C_f) و المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = -2$:
المعادلة تقبل حلا وحيدا .

つづく