

Prof: Sabbar Amine

**Exercice n°1:(4.5pts)**

On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1.a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$

1.b. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n > \frac{1}{2}$

1.c. Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{2} - u_n \right)$

1.d. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et qu'elle est convergente.

2. On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - \frac{1}{2}$

2.a. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique en précisant sa raison.

2.b. Calculer son premier terme  $v_0$

2.c. Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{1}{2} \left( 11 \left( \frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$

2.d. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. On pose  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

Montrer que  $S_n = \frac{55}{8} \left( 1 - \left( \frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{n}{2}$

**Exercice n°2 :(4pts)**

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher portant respectivement les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2

On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

1. Montrer que le nombre de cas possibles est 36

2. Soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées.

2.a. Montrer que  $p(X=2) = \frac{12}{36}$

2.b. Copier le tableau ci – contre et le compléter en justifiant la réponse.

$x_i$	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$			$\frac{12}{36}$		

2.c. Calculer  $E(X)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$

### Exercice n°3 :(8.5pts)

#### Partie I

On considère la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = 2 - \frac{2}{x} + \ln x$$

1. Calculer  $g'(x)$  et en déduire que  $g$  est croissante sur  $]0; +\infty[$
- 2.a. Calculer  $g(1)$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  (Le calcul des limites en 0 et en  $+\infty$  n'est pas demandé)
- 2.b. En déduire le signe de  $g$  sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $[1; +\infty[$

#### Partie II

Prof: Sabbar Amine

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - 1 + (x - 2)\ln x$$

1. Montrer que :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$
2. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 3.a. Montrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$
- 3.b. Calculer  $f(1)$ ,  $f(2)$  et  $f\left(\frac{1}{e}\right)$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$
- 3.c. En utilisant le tableau de variations déterminer l'image par  $f$  de l'intervalle  $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$

### Exercice n°4 :(3pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère la fonction numérique  $h$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = xe^x - 2x + 1$$

1. En utilisant une intégration par parties montrer que :  $\int_0^1 xe^x dx = 1$
2. Dans la figure ci-dessous  $(C_h)$  est la courbe représentative de  $h$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Calculer l'aire de la partie hachurée

