LAE فرض محروس

التمرين الأول (8ن)

نعتبر المستوى مستوىً منسوبا لـ م.م.م $(O,\vec{u},\vec{v})$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$(E)\quad z^3-(1+i\sqrt{3})z^2+z-(1+i\sqrt{3})=0$

علما أنها تقبل حلين تخيليين صرفين z_1 و z_2 مع $Im(z_1)>0$. نضع z_3 الحل الثالث للمعادلة (E)

2- أكتب z_1 و z_2 و z_3 و $2z_1+z_3$ على الشكل المثلثي

3- نعتبر النقط $\Omega(z_1)$ و $A(z_2)$ و $B(z_3)$ و $C(-z_3)$

بين أن: $AB\Omega C$ متوازي الأضلاع.

4- نعتبر التطبيق:

$f: P \longrightarrow P$

$M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = -(\sqrt{3}+i)z-1+i(1+\sqrt{3})$

أ- أكتب: $\frac{z'-i}{z-i}$ على الشكل الأسي

ب- إستنتج أن f مركب تحويلين في المستوى محددا عناصرهما المميزة.

ج- نضع: $M_0(\frac{\sqrt{3}}{4}z_3)$، أحسب: ΩM_0 وحدد قياس $(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M_0})$

5- نضع $M_{n+1}=f(M_n)$ حيث M_n نقطة لحقها z_n ، $\forall n\in\mathbb{N}$

أ- مثل في المعلم، Ω ، M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3

ب- بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ z_n-i=2^n e^{i\frac{7\pi n}{6}}(z_0-i)$

ج- أحسب المسافة: $d_n=\Omega M_n$ ثم حدد أصغر عدد طبيعي n بحيث $d_n>10^2$

التمرين الثاني (12ن)

$f_n(x)=xe^{-\frac{1}{nx}}$ ، $x>0$ و $f_n(0)=0$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

1- أ- بين أن f_n متصلة وق ش في 0 على اليمين

ب- أدرس تغيرات f_n وأعط جدول تغيراتها

2- أ- بين أن: $\forall x\geq0,\ 0\leq 1-e^{-x}\leq x$

ب- إستنتج أن: $\forall x\geq0,\ 0\leq e^{-x}-1+x\leq \frac{x^2}{2}$

ج- إستنتج أن: $\forall x>0\quad 0\leq f_n(x)-(x-\frac{1}{n})\leq \frac{1}{2n^2x}$

3- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_{f_n} بجوار $+\infty$

4- أدرس الوضع النسبي لـ C_{f_n} و $C_{f_{n+1}}$

5- أنشئ في نفس المعلم C_{f_1} و C_{f_2}

6- بين أن المعادلة $xe^{-\frac{1}{nx}}=1$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]0,+\infty[$ ثم بين أن $1<\alpha_n<2$

7- بين أن α_n حل للمعادلة: $x\ln x=\frac{1}{n}$

8- أ- أدرس تغيرات الدالة: $h(x)=x\ln x$ على $[1,+\infty[$

ب- بين أن (α_n) تناقصية

ج- بين أن (α_n) متقاربة ثم حدد نهايتها