

LA LOGIQUE COMBINATOIRE

Compétences associées

A2 : Analyser et interpréter une information numérique

DEFINITION

De nombreux dispositifs électroniques, électromécanique, (mécanique, électrique, pneumatique, etc....) fonctionnent en TOUT ou RIEN.

Ceci sous-entend qu'ils peuvent prendre 2 états. Exemple :

Arrêt marche	- Ouvert fermé -
Enclenché déclenché	- Avant arrière
Vrai faux	- Conduction blocage

Un système présentera un fonctionnement logique combinatoire si l'état à un instant t des variables de sortie ne dépend que de l'état des variables d'entrée au même instant t .

VARIABLE LOGIQUE

Une variable logique ne peut prendre que 2 états:

- Etat vrai: oui; haut; 1; high.
- Etat faux: non; bas; 0; low.

Pour ces raisons, il est beaucoup plus avantageux d'employer un système mathématique n'utilisant que 2 valeurs numériques.

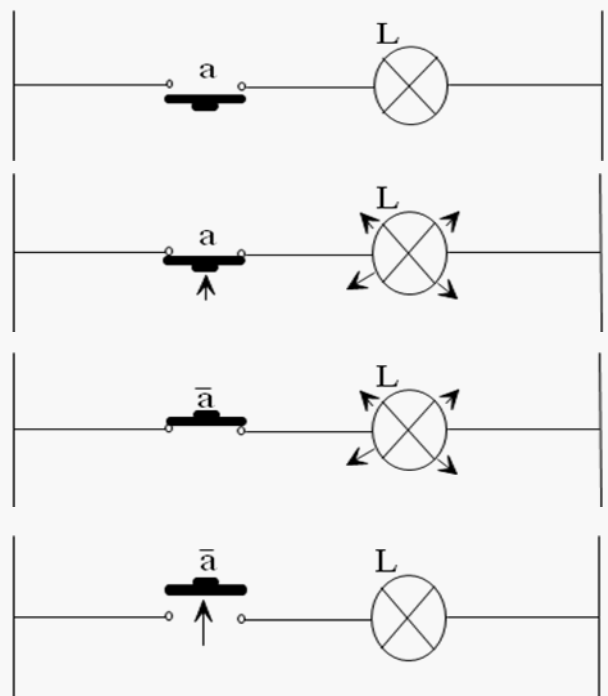
La variable binaire est aussi appelée variable **booléenne**. (De George Boole, mathématicien anglais 1815 -1864)

Du point de vue des contacts

On choisit habituellement: *L'état « 1 » lorsqu'il y a action sur le contact*

L'état « 0 » lorsqu'il n'y a pas action sur le contact

- *pas d'action sur a* $\Rightarrow a=0$
 a est au repos la lampe est éteinte $L=0$
- *Action sur a* $\Rightarrow a=1$
 a est actionné la lampe s'allume $L=1$
- *Pas d'action sur \bar{a}* $\Rightarrow \bar{a}=0$
• *au repos la lampe est allumée* $L=1$
- *Action sur \bar{a}* $\Rightarrow \bar{a}=1$
est actionné la lampe est éteinte $L=0$



REPRESENTATION D'UNE FONCTION

Une fonction **X** (exemple: allumer une lampe) peut comporter **n** variables logiques.

Nous obtenons 2^n combinaisons pour ces **n** variables.

Pour chacune de ces combinaisons, la fonction peut prendre une valeur **0** ou **1**.

L'ensemble de ces 2^n combinaisons des variables et la valeur associée de la fonction peut être représenté de différentes façons.

La table de vérité

Exemple:

X=1 si **a=0** et **b=1**
a=0 et **b=0**
a=1 et **b=0**

a	b	X
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

La forme canonique

Pour écrire l'équation de **X** en fonction des 2 variables il faut dire autant de termes que de fois que la fonction est égale à 1.

Ce qui donne une écriture "algébrique" en notant :

La variable par sa lettre si elle vaut 1 (ex : si **a** vaut **1** nous écrivons **a**)

La variable par sa lettre surlignée si elle vaut 0. (si **a** vaut **0** nous écrivons \bar{a} , nous lirons a barre)

Pour la table de vérité ci-dessus, cela nous donne

$$X = \bar{a} \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{b}$$

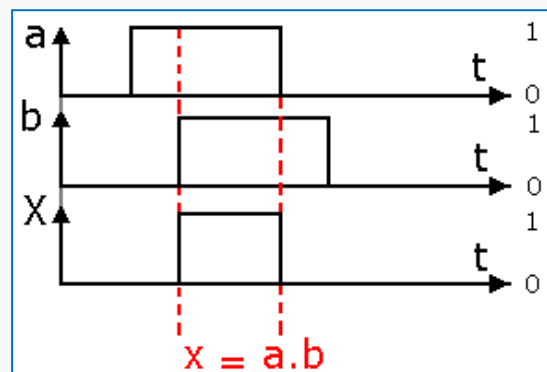
Cette forme d'écriture est appelée **FORME CANONIQUE**.

Chronogramme

Il existe une autre façon de représenter une fonction logique appelée **chronogramme** ou diagramme des temps.

Les variables binaires sont représentées par un **niveau** (souvent de tension) lorsqu'elles sont à **1**.

Elles évoluent **dans le temps** et nous représentons la fonction logique résultante de ces variables, également par un niveau de tension.



LES OPERATEURS LOGIQUES

La fonction NON ou NO

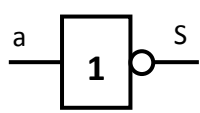
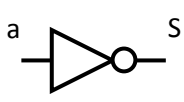
- On associe à une variable binaire quelconque a son complément

$$S=1 \quad \text{si} \quad a=0$$

$$\bar{a}=1$$

a	S
0	1
1	0

- Equation logique : $S = \bar{a}$

Symbolisation	
Norme C.E.I	Norme A.N.S.I
	

La fonction ET ou AND

- L'état 1 est obtenu lors de l'action simultanée sur les 2 variables a et b

$$S=1 \quad \text{si} \quad a=1 \text{ et } b=1$$

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Equation logique : $S = a . b$

- Propriétés : $X . X = X$
 $X . 1 = X$
 $X . \bar{X} = 0$
 $X . 0 = 0$

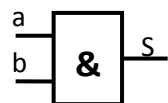
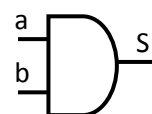
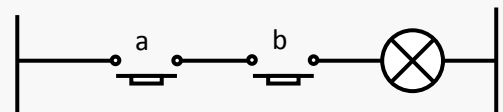
Symbolisation	
Norme C.E.I	Norme A.N.S.I
	

Schéma électrique:



La fonction OU ou OR

- L'état 1 est obtenu lors de l'action sur la variable a ou sur la variable b ou des 2.

$$S=1 \quad \text{si} \quad a=0 \text{ et } b=1$$

$$a=1 \text{ et } b=0$$

$$a=1 \text{ et } b=1$$

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Equation logique : $S = a + b$

- Propriétés : $X + X = X$
 $X + 1 = 1$
 $X + \bar{X} = 1$
 $X + 0 = X$

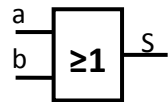
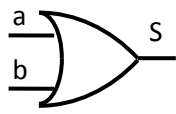
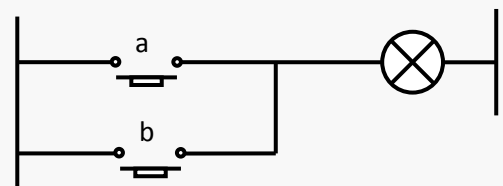
Symbolisation	
Norme C.E.I	Norme A.N.S.I
	

Schéma électrique:



La fonction OU exclusif ou XOR

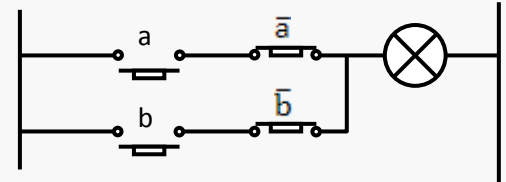
- L'état 1 est obtenu lors de l'action sur la variable a ou sur la variable b mais pas des 2.

$S=1$ si $a=0$ et $b=1$
 $a=1$ et $b=0$

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symbolisation	
Norme C.E.I	Norme A.N.S.I

Schéma électrique:



- Equation logique : $S = a \oplus b$

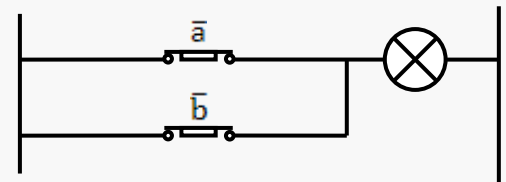
La fonction NON-ET ou NAND

- L'état 0 ($\bar{1}$) est obtenu lors de l'action sur la variable a ou sur la variable b mais pas des 2.

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symbolisation	
Norme C.E.I	Norme A.N.S.I

Schéma électrique:



- Equation logique : $S = \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

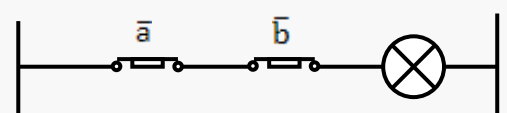
La fonction NON-OU ou NOR

- L'état 1 est obtenu s'il n'y aucune action, ni sur a ni sur b.

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Symbolisation	
Norme C.E.I	Norme A.N.S.I

Schéma électrique:



- Equation logique : $S = \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

ALGÈBRE DE BOOLE

Redondance : $x + \bar{x} \cdot y = x + y$

Distributivité : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Relation de De Morgan : $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

Exemples : $S = \overline{\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}} =$

$S = \overline{a \cdot b + \bar{a} \cdot b \cdot c} =$

$S = \overline{\bar{a} \cdot b + b \cdot \bar{c}} =$

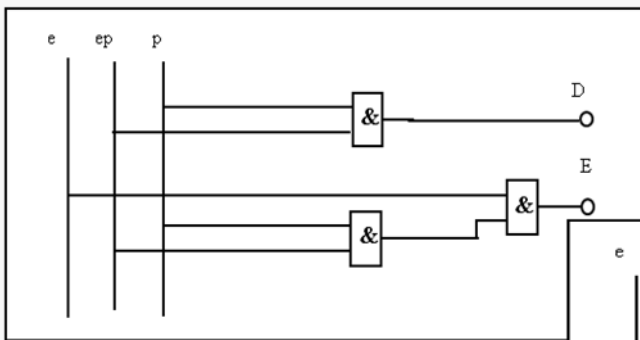
$S = \overline{c \cdot \bar{b} + a + \bar{c}} =$

SCHEMA LOGIQUE

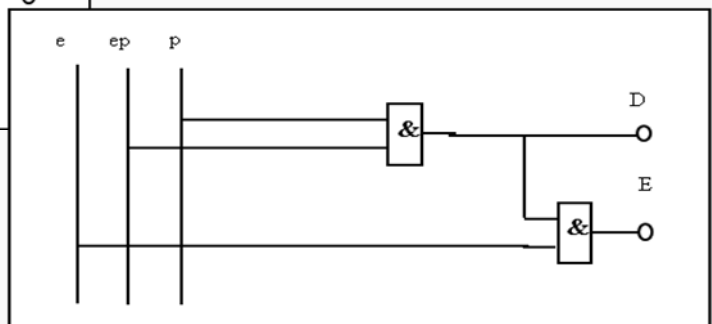
Un schéma logique est la représentation graphique de l'équation logique.

Exemple : $D = ep \cdot p$

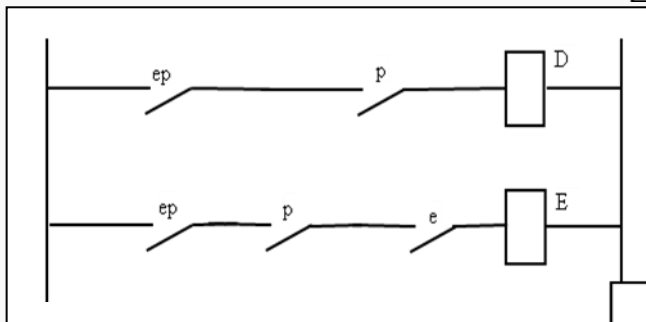
$E = ep \cdot e \cdot p$



Ici, le **logigramme** laisse apparaître que l'on peut aussi écrire l'équation de E en fonction de D



Le logigramme n'est pas le seul outil de schéma logique,



On peut dessiner un schéma à contacts (en échelle).

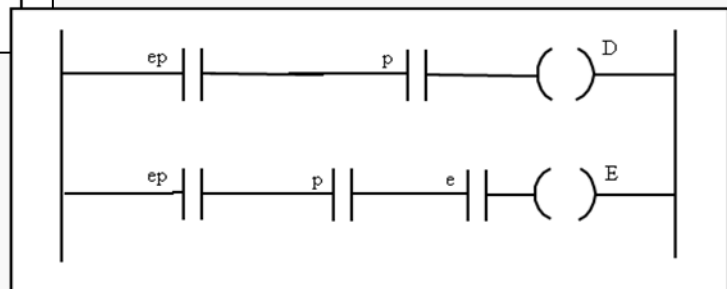


Schéma à contacts (Règles de schéma SCHNEIDER. PL7_1)

TABLEAU DE KARNAUGH

Ce tableau reprend les indications de la table de vérité pour les mettre sous une autre forme

- Le nombre de cases est égal au nombre de lignes de la table de vérité
- Chaque ligne et chaque colonne correspond à un état d'une ou plusieurs variables d'entrées

Exemples:

	b	0	1
a	0		
	0		

Variables d'entrées a et b

		bc			
		00	01	11	10
a	0				
	0				

Variables d'entrées a, b, c

- Chaque ligne et chaque colonne est numérotée avec l'état que peuvent prendre les variables d'entrées
- Entre deux cases adjacentes, seule une variable d'entrée peut changer d'état

Exemple :

Soit 4 variables a,b,c,d

La case x correspond à: a, b, c, d = 0

La case y correspond à: a, c = 0 b, d = 1

La case z correspond à: a, b, c, d = 1

		cd			
		00	01	11	10
ab	00	x			
	01		y		
	11			z	
	10				

TRANSPOSITION D'une table de vérité en un tableau de KARNAUGH

Exemple

	C	B	A	S
(a)	0	0	0	0
(b)	0	0	1	0
(c)	0	1	1	1
(d)	0	1	0	0
(e)	1	1	0	1
(f)	1	1	1	1
(g)	1	0	1	1
(h)	1	0	0	0

Devient :

		BA			
		00	01	11	10
C	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

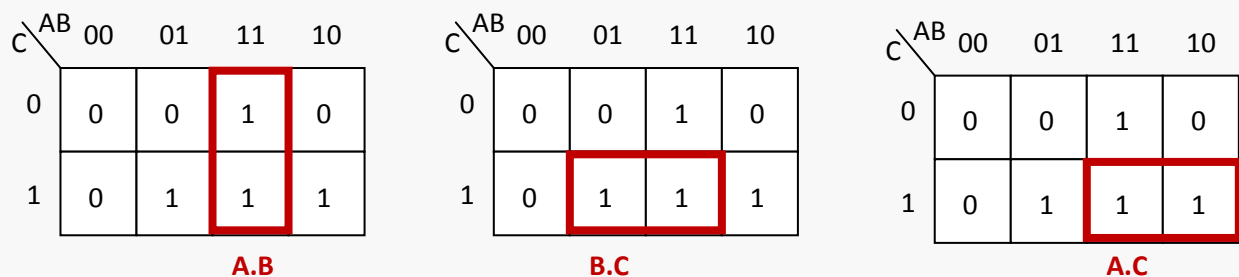
SIMPLIFICATION DES FONCTIONS

Regroupement des cases

Pour simplifier l'équation, il suffit de regrouper les cases qui possèdent le même état de la variable de sortie dans les conditions suivantes

- Les cases regroupées doivent être adjacentes
- Le regroupement des cases se fait par puissance de 2 (2,4,8,16,32....)
- Les cases possédant le même état de la variable de sortie doivent être utilisées
- Le regroupement doit être le plus grand possible
- Une case peut très bien appartenir à plusieurs regroupements.

A partir de l'exemple précédent: 3 regroupements possibles



Equation de chaque regroupement.

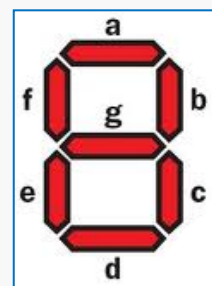
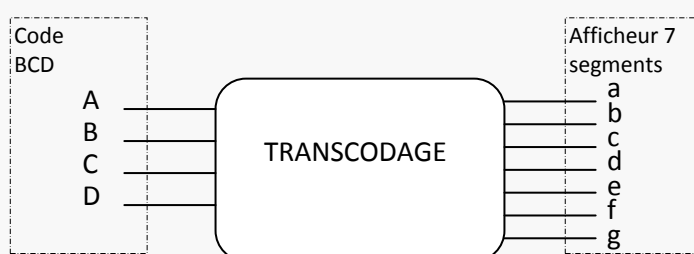
Chaque regroupement donne le produit logique des variables d'entrée qui n'ont pas changées d'état. L'ensemble de ces regroupements est une somme logique

Dans notre cas : $S = A.B + B.C + A.C$

Cas particuliers

Lors d'un tableau à n variables, si les 2^n cas ne sont pas tous décrits, il subsistera alors des cas que l'on qualifiera d'indifférents. Ils seront symbolisés par la variable x dans le tableau de Karnaugh on pourra selon les besoins les remplacer individuellement par des 1 ou des 0

REALISATION D'UN DECODEUR BCD → 7 SEGMENTS

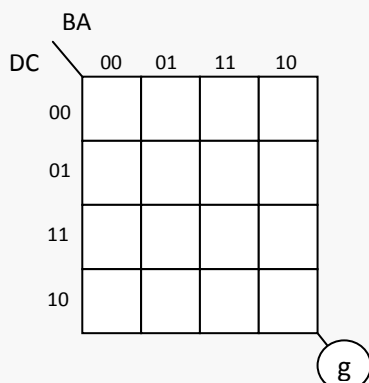
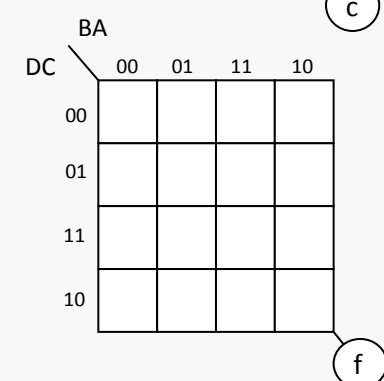
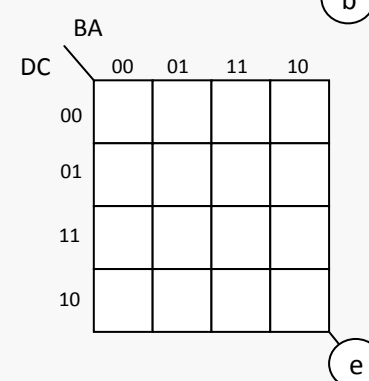
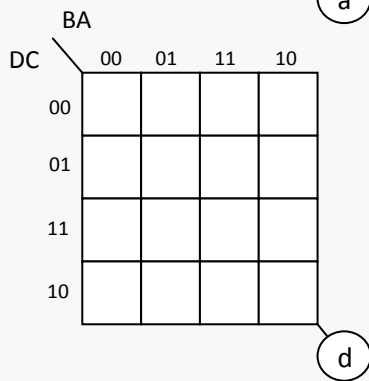
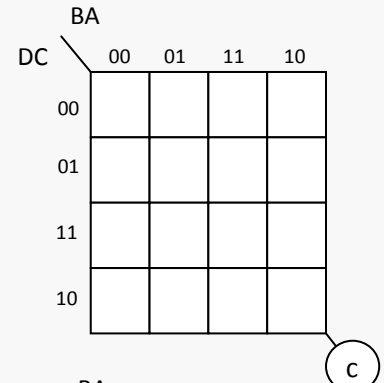
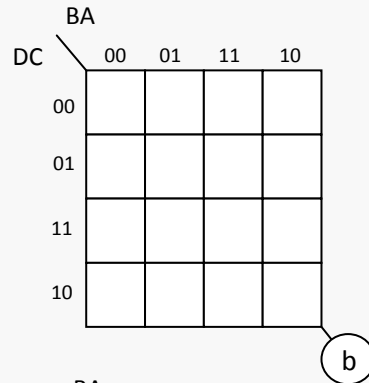
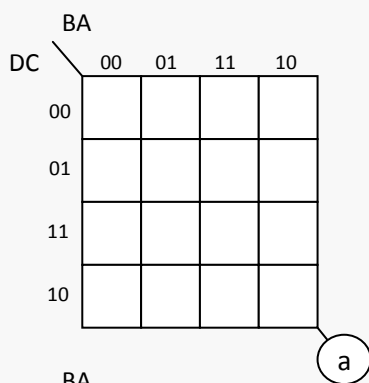


- Etablir la table de vérité du transcodeur.
- En utilisant KARNAUGH pour chaque segment à commander, trouver le logigramme correspondant pour chaque segment. Le réaliser à l'aide de portes NAND à 2 entrées

• *Table de vérité du transcodeur*

Nb décimal	Codage BCD				a	b	c	d	e	f	g
	D	C	B	A							
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

• *Tableaux de KARNAUGH*



• *Equations:*

a =

b =

c =

d =

e =

f =

g =