تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2015 الفرض الرابع الجمعة 21 فبراير 2014 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2014/2013

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=...=\frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}=a$ $(*)$ و $(**)$ $x_1+x_2+...+x_{1006}=503^2$

إذا كان $a=0$ فإن $x_1=x_2=...=x_{1006}$ و هذا يتناقض $(**)$، إذن : $a\neq 0$

أيضا بما أن : $x_1\neq x_1+1$ فإن: $a\neq 1$

الآن لدينا :

$$(*)\Rightarrow \forall k\in\{1,..,1006\}\quad \frac{x_k}{x_k+2k-1}=a\Rightarrow \forall k\in\{1,..,1006\}\quad ax_k+a(2k-1)=x_k$$

$$(*)\Rightarrow x_k=\frac{a}{1-a}(2k-1)\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{1006}x_k=\frac{a}{1-a}\sum_{k=1}^{1006}(2k-1)=\frac{a}{1-a}\times\left(\frac{1+2011}{2}\right)\times 1006=1006^2\frac{a}{1-a}$$

$$(**)\Rightarrow 1006^2\frac{a}{1-a}=503^2\Rightarrow\frac{a}{1-a}=\left(\frac{503}{1006}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow 4a=1-a\Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

إذن:

$$\Rightarrow x_{1006}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\times 2011=\frac{2011}{4}$$

$$\boxed{x_{1006}=\frac{2011}{4}}$$

تمرين 2 — Exercise 2

1) ليكن $P_{(n,a)}$ عدد حلول المعادلة في IN^{*n} حيث $a>2$ $a\in IN^*$

لدينا : $P_{(1,a)}=1$ (المعادلة $x_1=a$ تقبل الحل a كحل وحيد)

الآن نعتبر المعادلة: $x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}=a$ (E_{n+1})

كون كل الأعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة يستلزم أن : $x_k\in\{1,...,a-1\}$ $\forall k\in\{1,..,n+1\}$

المعادلة (E_{n+1}) تكافئ $x_1+x_2+...+x_n=a-x_{n+1}$

هذا يعني أن كل قيمة $k\in\{1,...,a\}$ للمجهول x_{n+1} تحيل إلى $P_{(n,a-k)}$ حلا ممكنا

إذن عدد حلول هذه المعادلة هو : $P_{(n+1,a)}=P_{(n,a-1)}+...+P_{(n,k)}+...+P_{(n,1)}=\sum_{k=1}^{a}P_{(n,a-k)}$

الآن سنطبق هذه النتيجة على القيم $n=2$ و $n=3$

$$P_{(2,a)}=\sum_{k=1}^{a-1}P_{(1,a-k)}=\sum_{k=1}^{a-1}1=a-1$$

و منه حسب هذه النتيجة نجد:

$$P_{(3,a)}=\sum_{k=1}^{a-1}P_{(2,a-k)}=\sum_{k=1}^{a-1}(a-k-1)=\sum_{k=1}^{a-1}(a-1)-\sum_{k=1}^{a-1}(k)$$

$$=(a-1)(a-1)-\frac{a(a-1)}{2}=(a-1)\left(\frac{2a-2-a}{2}\right)=\frac{(a-1)(a-2)}{2}$$

تطبيقا لهذه النتيجة نستنتج بسهولة أن عدد حلول المعادلة : $(x,y,z)\in IN^{*3}$ / $x+y+z=2013$ (E)

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

هو : $P_{(3,2013)}=\dfrac{2012\times 2011}{2}=2023066$

1) في حالة كان $x=y$ المعادلة ستكافئ : $(E)\Leftrightarrow 2y+z=2013$

مما يعني أن العدد z فردي : منه : $(E)\Leftrightarrow 2y+2t+1=2013/\ z=2t+1;\ t\in IN$

أي : $(E)\Leftrightarrow y+t=1006/\ z=2t+1;\ t\in IN$

إذن عدد حلول المعادلة (E) هو نفس عدد حلول المعادلة $p+q=1006/\ (p,q)\in IN^{*}\times IN$

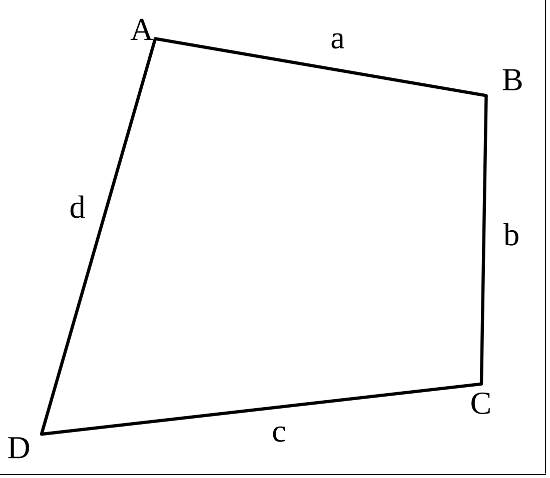
و التي حلولها هي : $(1,1005);\ (2,1004);....;(1006,0);$

مما يعني أن عدد حلول المعادلة (E) حيث $x=y$ هو 1006

الطريقة المقدمة في السؤال الأول تم تقديمها قصد معرفة الطريقة العامة لتحديد عدد حلول المعادلة المقترحة بالنسبة لعدد مجاهيل أكثر من 3، لكن يمكن الاستدلال غير ذلك.

في السؤال الثاني يجب مراعاة كون أحد المجهولين غير منعدم بينما الآخر يمكن أن يكون منعدما.

تمرين 3 — Exercise 3



1) نضع : $S=Aire(ABCD)$

لدينا : $S=Aire(ABD)+Aire(CBD)=\dfrac{1}{2}a\times d\times\sin(\hat{A})+\dfrac{1}{2}b\times c\times\sin(\hat{C})$

$S\le\dfrac{1}{2}ad+\dfrac{1}{2}bc$

أيضا : $S=Aire(ABC)+Aire(DAC)=\dfrac{1}{2}a\times b\times\sin(\hat{B})+\dfrac{1}{2}d\times c\times\sin(\hat{D})$

$S\le\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}dc$

إذن : $2S\le\dfrac{1}{2}ad+\dfrac{1}{2}bc+\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}dc$ ، أي :

$S\le\dfrac{1}{4}(ad+bc+ab+dc)=\dfrac{1}{4}(a\times(d+b)+c\times(d+b))$

$S\le\dfrac{1}{4}(a+c)(d+b)$

بالتالي : $S\le 12$ ، و باعتبار مستطيل بعداه 4 و 3 و الذي يحقق شروط المسألة سنستنتج أن 12 هي المساحة القصوية.

2) الآن نعتبر رباعيا $ABCD$ حيث $AD+BC=8$ و $AB+CD=6$ و $Aire(ABCD)=12$

و سنبين أنه مستطيل.

لدينا : $S=\dfrac{1}{4}(a+c)(d+b)$

سبق و برهنا أن : $S\le\dfrac{1}{2}ad+\dfrac{1}{2}bc$ منه : $(a+c)(b+d)\le 2ad+2bc$ ، منه : $ab+cd\le ad+bc$

و بنفس الطريقة و باستعمال $S\le\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}dc$ ، نستنتج أيضا أن : $ab+cd\ge ad+bc$

إذن : $ab+cd=ad+bc$ ، منه : $\begin{matrix}a\times(b-d)+c\times(d-b)=0\\ (b-d)(a-c)=0\end{matrix}$ ، إذن : $a=c$ أو $b=d$

إذا كان : $a=c$ فإن: $S=\dfrac{1}{2}ad\times\sin(\hat{A})+\dfrac{1}{2}ba\times\sin(\hat{C})=\dfrac{1}{2}a\left(d\sin(\hat{A})+b\sin(\hat{C})\right)$ و $S=\dfrac{1}{2}a(d+b)$

منه : $d\sin(\hat{A})+b\sin(\hat{C})=d+b$ منه : $d(1-\sin(\hat{A}))+b(1-\sin(\hat{C}))=0$

منه : $\sin(\hat{A})=1$ و $\sin(\hat{C})=1$ (لأنه إذا كان مجموع أعداد موجبة منعدما فكل هذه الأعداد منعدمة)

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

منه : $\hat{A} = \hat{C} = 90°$ ، إذن المثلثان ABD و CBD متقايسان (ضلع مشترك و ضلعان متقايسان و زاوية)

إذن : $d = b$ ، منه الرباعي مستطيل، و بنفس الطريقة نبين نفس النتيجة في حالة $b = d$

خلاصة : الشكل الذي يحقق الشروط المطلوبة هو المستطيل.

من المفيد معرفة بعض قواعد المساحات التي تخص الرباعيات ، و هذه خاصية إضافية:

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{2} AC \times BD \times \left|\sin\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)\right|$$

الحلول المقترحة هي حلول شخصية و ليست حلولا رسمية