السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات الفرض الثالث الجمعة 16 يناير 2015 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2015/2014
	رياضيات النجاح	

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $abc=1$ إذن : $\frac{a}{b}=a^2c$ و $\frac{b}{c}=b^2a$ و $\frac{c}{a}=c^2b$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}+b^2+2\frac{b}{c}+\frac{1}{c^2}+c^2+2\frac{c}{a}+\frac{1}{a^2}$$

إذن :
$$=a^2+2a^2c+\frac{1}{b^2}+b^2+2b^2a+\frac{1}{c^2}+c^2+2c^2b+\frac{1}{a^2}$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}\right)+\left(b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}\right)+\left(c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2a+c^2b+a^2c\right)$$

ونعلم أن : $(x+y+z)^3\geq 27\,xyz \quad \forall\,(x,y,z)\in\left(IR^+\right)^3$

إذن : $\left(a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}\right)^3\geq 27a^3$ منه : $a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}\geq 3a$ و بالمثل : $b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}\geq 3b$ و $c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}\geq 3c$

و أيضا : $\left(b^2a+c^2b+a^2c\right)^3\geq 27\,b^3a^3c^3\geq 27$ منه : $b^2a+c^2b+a^2c\geq 3$

بالتالي : $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 3(a+b+c+1)$

لدينا :
$$A=\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2-3(a+b+c+1)$$
$$A=\left(a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}-3a\right)+\left(b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}-3b\right)+\left(c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}-3c\right)+\left(b^2a+c^2b+a^2c-3\right)$$

بما أن : $a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}-3a\geq 0$ و $b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}-3b\geq 0$ و $c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}-3c\geq 0$ و $b^2a+c^2b+a^2c-3\geq 0$

فإن:
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=3(a+b+c+1)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}=3a\\ b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}=3b\\ c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}=3c\\ b^2a+c^2b+a^2c=3\end{cases}$$

و نعلم أن : $\left((x+y+z)^3=27xyz\Leftrightarrow x=y=z\right)\quad\forall\,(x,y,z)\in\left(IR^+\right)^3$

إذن :
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=3(a+b+c+1)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2a=\frac{1}{b^2}\\ b^2=c^2b=\frac{1}{c^2}\\ c^2=a^2c=\frac{1}{a^2}\\ b^2a=c^2b=a^2c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$$

الأفضل استعمال المتفاوتة $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{x\,y\,z}\quad\forall\,(x,y,z)\in\left(IR^+\right)^3$ ، لكنها تتضمن مفهوم الجذر المكعب الشبيه في

تعريفه بالجذر مربع، لذلك آثرت استعمال متفاوتة شبيهة تتضمن مفاهيم معروفة.

المتفاوتات $(x+y+z)^3 \geq 27\, x\,y\,z$ و $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{x\,y\,z}$ أو أيضا $x^3+y^3+z^3 \geq 3\,x\,y\,z$ يمكن استعمالها دون برهان في الأولمبياد، لكن من المفيد البحث عن برهانهما

المطلوب في السؤال الثاني إثبات حالة التساوي و ليس فقط ذكرها، لذلك استعملنا الخاصية: «يكون مجموع عدة أعداد موجبة منعدما إذا وفقط إذا كانت جميع هذه الأعداد منعدمة»

تمرين 2 — Exercise 2

بداية لدينا : $a_4 = \dfrac{a_3\,a_2+7}{a_1} = 13$

لدينا لكل $n \geq 4$: $a_n = \dfrac{a_{n-1}\,a_{n-2}+7}{a_{n-3}}$ منه : $a_n\,a_{n-3} = a_{n-1}\,a_{n-2}+7$ منه : $\begin{cases} a_n\,a_{n-3} = a_{n-1}\,a_{n-2}+7 \\ a_{n+1}\,a_{n-2} = a_n\,a_{n-1}+7 \end{cases}$

منه : $a_n\,a_{n-3} - a_{n+1}\,a_{n-2} = a_{n-1}\,a_{n-2} - a_n\,a_{n-1}$ منه : $a_n\,a_{n-3} + a_n\,a_{n-1} = a_{n-1}\,a_{n-2} + a_{n+1}\,a_{n-2}$

منه: $a_n\left(a_{n-3}+a_{n-1}\right) = a_{n-2}\left(a_{n-1}+a_{n+1}\right)$ منه : $\dfrac{a_{n-3}+a_{n-1}}{a_{n-2}} = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}$

الآن و باعتبار المتتالية: $u_n = \dfrac{a_{n-3}+a_{n-1}}{a_{n-2}}$ نستنتج أن : $\forall n \geq 4 \quad u_{n+2} = u_n$

إذن المتتاليتان $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(w_n)_{n\geq 2}$ المعرفتان بـ: $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ ثابتتان (لأن $\forall n \geq 2 \begin{cases} v_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} = v_n \\ w_{n+1} = u_{2n+3} = u_{2n+1} = w_n \end{cases}$)

منه : $\forall n \geq 4 \begin{cases} v_n = v_2 = u_4 = \dfrac{a_1+a_3}{a_2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ w_n = w_2 = u_5 = \dfrac{a_2+a_4}{a_3} = \dfrac{2+13}{3} = 5 \end{cases}$ منه : $\forall n \geq 4 \quad u_n \in IN$

الآن لدينا : $\forall n \geq 4 \quad a_{n-1} = a_{n-2}\,u_n - a_{n-3}$ أو أيضا $\forall n \geq 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1}\,u_{n+3} - a_n$

إذن للبرهان على النتيجة المطلوبة سنستعمل برهانا بالترجع من الرتبة الثانية

- لدينا : $a_1 \in Z$ و $a_2 \in Z$
- نفترض أن $a_n \in Z$ و $a_{n+1} \in Z$ ونبين أن : $a_{n+1} \in Z$ و $a_{n+2} \in Z$

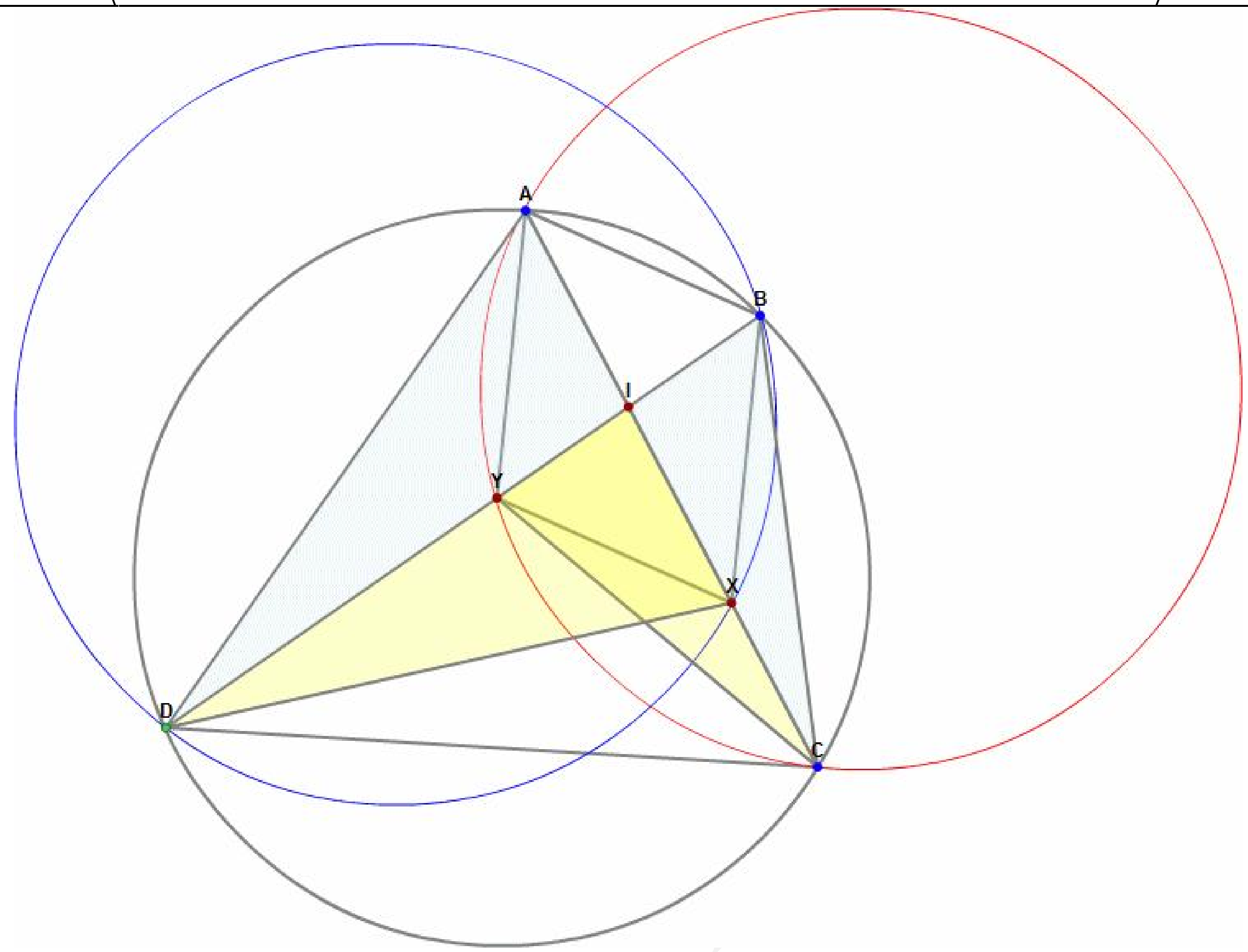
$a_{n+1} \in Z$ محققة من الافتراض

بما أن : $a_{n+2} = a_{n+1}\,u_{n+3} - a_n$ ، إذن $\begin{cases} a_{n+1} \in Z \\ u_{n+3} \in Z \\ a_n \in Z \end{cases} \Rightarrow a_{n+2} \in Z$ و هذا ينهي البرهان.

لمزيد من التفاصيل حول أنواع الترجع خصوصا الترجع القوي (Récurrence forte) يمكن زيارة الرابط :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Raisonnement_par_r%C3%A9currence

Exercise 3 تمرين 3



نعلم أنه إذا كان مثلث MNP محاطا بدائرة شعاعها R فإن : $\frac{\sin(\hat{M})}{NP}=\frac{\sin(\hat{N})}{MP}=\frac{\sin(\hat{P})}{MN}=\frac{1}{2R}$

إذن للبرهان أن الدائرة المحيطة بالمثلث BXD لها نفس شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث AYC يجب أن نبين أن :

$\frac{\sin(Y\hat{C}A)}{AY}=\frac{\sin(B\hat{D}X)}{BX}$ و لكون $AY=BX$ فذلك يعني أنه يجب أن نبين أن : $\sin(Y\hat{C}A)=\sin(B\hat{D}X)$

خلال حل التمرين سنعتبر I مركز متوازي الأضلاع $ABXY$

الآن ، لدينا في الدائرة المحيطة بالرباعي $ABCD$ ، $[D\hat{A}C]$ و $[D\hat{B}C]$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس ، إذن : $D\hat{A}C=D\hat{B}C$ و بما أن : $A\hat{I}D=B\hat{I}C$ فسنستنتج أن المثلثين AID و BIC متشابهان

إذن : $\frac{ID}{IC}=\frac{IA}{IB}$ منه : $\frac{ID}{IC}=\frac{IX}{IY}$ (لأن : $IX=IA$ و $IY=IB$)و بما أن $X\hat{I}Y$ زاوية مشتركة بين المثلثين IYC و IXD فإنهما متشابهان

إذن : $Y\hat{C}A=B\hat{D}X$ إذن : $\sin(Y\hat{C}A)=\sin(B\hat{D}X)$ ، و هذا ينهي البرهان

لمزيد من التفاصيل حول حالات تشابه مثلثين يمكن زيارة الرابط : http://goo.gl/F7s8Ck

فيما يخص النقطتين X و Y ، بما أن $ABXY$ متوازي أضلاع فهذا يعني أن : $Y=T(X)$ حيث T هي الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$
بما أن $X\in(AC)$ فإن: $Y\in T((AC))$ و لدينا : $Y\in[BD]$ ، إذن : $Y=[BD]\cap T((AC))$
و هذا يكون إنشاء النقطتين X و Y كما يلي:
ننشئ E مماثلة B بالنسبة لـ A ،($E=T(A)$)، ننشئ (Δ) المار من E و الموازي لـ (AC) ،($(\Delta)=T((AC))$)
Y هي نقطة تقاطع (Δ) و $[BD]$ و X هي النقطة التي تحقق $\overrightarrow{YX}=\overrightarrow{AB}$