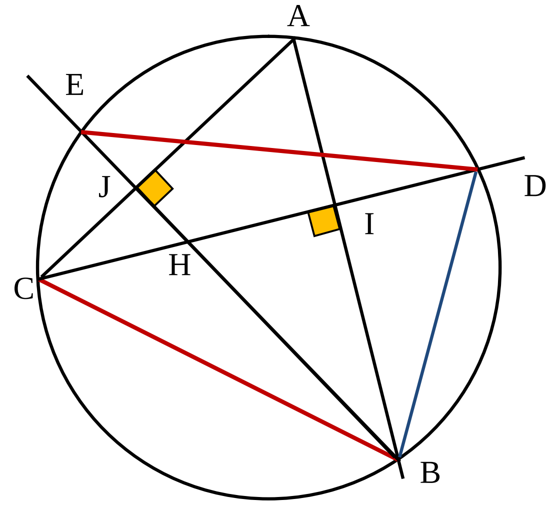
السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2017 الفرض الثاني الجمعة 18 دجنبر 2015 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2016/2015

تمرين 1 — Exercise 1

طريقة 1



لدينا من جهة : $J\hat{H}C = I\hat{H}B$ و $H\hat{J}C = H\hat{I}B = 90°$ إذن : المثلثان HIB و JHC متشابهان منه: $J\hat{C}H = H\hat{B}I$ (1)

من جهة أخرى لدينا $J\hat{C}H = I\hat{B}D$ (2) (زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AD)

من (1) و (2) نستنتج أن $H\hat{B}I = I\hat{B}D$ إذن : $90° - H\hat{B}I = 90° - I\hat{B}D$ منه : $I\hat{H}B = I\hat{D}B$ $(*)$

وفق الافتراض $ED = BC$ نستنتج أن $H\hat{B}D = I\hat{D}B$ $(**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن $H\hat{B}D = I\hat{D}B = I\hat{H}B$ ، إذن BHD مثلث متساوي الأضلاع.

بالتالي : $C\hat{A}B = C\hat{D}B = 60°$ (زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BC)

- للمزيد عن الزوايا المحيطية تصفح الرابط : http://goo.gl/qKYKlU
- و للمثلثات المتشابهة الرابط : http://goo.gl/F7s8Ck
- هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين هذه إحداها فقط ، توصلت بطريقة أخرى من طرف أحد المشاركين، لكنني آثرت إدراج أول الطريقة أنجزت بها التمرين.

تمرين 2 — Exercise 2

1

لدينا:

$$a-b \ge \sqrt{4n-3} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 4n-3 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \ge 4n-3 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 4n-3+2n^2+2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2n^2+4n-1 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \ge 2n^2+4n-1+2n^2+2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge (2n+1)^2 \Leftrightarrow a+b \ge 2n+1$$

الآن بما أن : $a+b \ge 2\sqrt{ab} \ge 2\sqrt{n^2+1} > 2n$ فإن : $a+b \ge 2n+1$ (لأن $\begin{cases} x > y \\ (x,y) \in Z^2 \end{cases} \Rightarrow x \ge y+1$)

مما يعني صحة المتفاوتة $a-b \ge \sqrt{4n-3}$

$a-b=\sqrt{4n-3} \Leftrightarrow a+b=2n+1$ و بما أن : $ab=n^2+1$

إذا كان $a-b=\sqrt{4n-3}$ فإنه بوضع : $a-b=m$ نستنتج أن $4n-3=m^2$

$4n-3=m^2 \Rightarrow m \text{ impaire} \Rightarrow m=2k+1/k\in IN \Rightarrow 4n-3=4k^2+4k+1 \Rightarrow n=k^2+k+1$

و لدينا : $a+b=2n+1 \Leftrightarrow a-b=\sqrt{4n-3}$ إذن : $\begin{cases} a+b=2n+1 \\ ab=n^2+1 \end{cases}$

إذن a و b هما حلا المعادلة: $t^2-(2n+1)t+(n^2+1)=0$

$\Delta=(2n+1)^2-4(n^2+1)=4n^2+4n+1-4n^2-4=4n-3=m^2$

منه: $t_1=\dfrac{2n+1+m}{2}=\dfrac{2k^2+2k+2+1+2k+1}{2}=k^2+2k+2$ و $t_2=\dfrac{2n+1-m}{2}=\dfrac{2k^2+2k+2+1-2k-1}{2}=k^2+1$ 2

و لكون $a>b$ فإن: $a=(k+1)^2+1$ و $b=k^2+1$

عكسيا إذا كان $a=(k+1)^2+1=k^2+2k+2$ و $b=k^2+1$ فإن : $ab=(k^2+k+1)^2+1=n^2+1$ (يمكن التحقق من ذلك

بالنشر) و $a-b=2k+1=m=\sqrt{4n-3}$

خلاصة التساوي يتحقق إذا وفقط إذا كان : $\exists k\in IN \ / \ \ n=k^2+k+1$

السؤال الثاني يتطلب مهارة جيدة في الحسابيات

تمرين 3 — Exercise 3

نفترض أنه لا يوجد تلميذان حصلا على نفس النقطة، إذن جميع النقط المحصل عليها مختلفة مثنى مثنى.

نعتبر المجموعة $P=\{0,5,10..,160\}=\{5k/k\in IN;\ 0\le k\le 32\}$ التي تمثل النقط التي يمكن أن يحصل عليها تلميذ ما.

ليكن N مجموع النقط التي حصل عليها كل التلاميذ و n عدد الأجوبة التي أجاب عنها التلاميذ جوابا صحيحا في أقل من دقيقة.

نستنتج من جهة أن :

$$N<\sum_{p_i\in P}p_i=\sum_{k=0}^{32}5k=0+5+...+160=\frac{160+0}{2}\times(32-0+1)=80\times 33=2640$$ (مجموع متتالية حسابية أساسها 5)

و من جهة أخرى، ليكن s عدد الأجوبة الصحيحة التي أعطيت بعد مرور دقيقة، و حسب المعطيات هذا العدد يساوي عدد الأجوبة غير الصحيحة ، إذن و لكون عدد كل الأجوبة هو 480 فإن: $n+2s=480$ منه : $s=\dfrac{480-n}{2}$

إذن مجموع النقط المحصل عليها هو : $N=10n+5s=10n+5\left(\dfrac{480-n}{2}\right)=\dfrac{15n+2400}{2}$

و حسب المعطيات $n>240$ إذن : $N=\dfrac{15n+2400}{2}>3000$

و هذا يناقض المتفاوتة المحصل عليها سابقا.

$\sum_{k=0}^{32}5k=0+5+...+160=5\sum_{k=0}^{32}k=5(1+2+...+32)=5\times\dfrac{32\times 33}{2}=2640$ حيث نعلم أن : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

حل هذا التمرين أرسله التلميذ يونس البحراوي و أنجزه الأستاذ **Mustafa Ougrine**

الحلول المقترحة هي حلول شخصية و ليست حلولا رسمية