السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات الفرض الثاني الجمعة 12 دجنبر 2014 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2015/2014

تمرين 1 — Exercise 1

ليكن A مجموعة الفتيان الذين اختاروا اللغة الفرنسية و B مجموعة الفتيان الذين اختاروا اللغة الألمانية

و C مجموعة الفتيات اللواتي اخترن اللغة الفرنسية و D مجموعة الفتيات اللواتي اخترن اللغة الألمانية

لدينا حسب المعطيات: $A\cap B\cap C\cap D=\varnothing$ و
$$\begin{cases} Card(C)+Card(D)=10 \\ Card(A)+Card(B)=23-10=13 \\ Card(A)+Card(C)=11 \\ Card(C)+Card(B)=16 \end{cases}$$

منه: $2Card(C)+Card(A)+Card(B)=16+11$ منه: $2Card(C)+13=27$ بالتالي: $Card(C)=7$

$Card(X)$ تعني عدد عناصر المجموعة X

تمرين 2 — Exercise 2

لدينا: a و b و c أعداد فردية متتابعة غير منعدمة حيث $a<b<c$

إذن يوجد $k\in IN$ حيث: $a=2k+1$ و $b=2k+3$ و $c=2k+5$

منه:
$$a^2+b^2+c^2=4k^2+4k+1+4k^2+12k+9+4k^2+20k+25$$
$$a^2+b^2+c^2=12k^2+36k+35$$

منه:
$$a^2+b^2+c^2+1=12k^2+36k+36=12\left(k^2+3k+3\right)$$

من جهة أخرى العدد $a^2+b^2+c^2$ عدد فردي، إذن حسب المعطيات نستنتج أن:

$$a^2+b^2+c^2\in\{1111,\ 3333, 5555, 7777, 9999\}$$

وحسب النتيجة $12/a^2+b^2+c^2+1$ نستنتج أن: $a^2+b^2+c^2=5555$ (لأن بقية الأعداد إذا أضفنا لها 1 لا تقبل القسمة على 12)

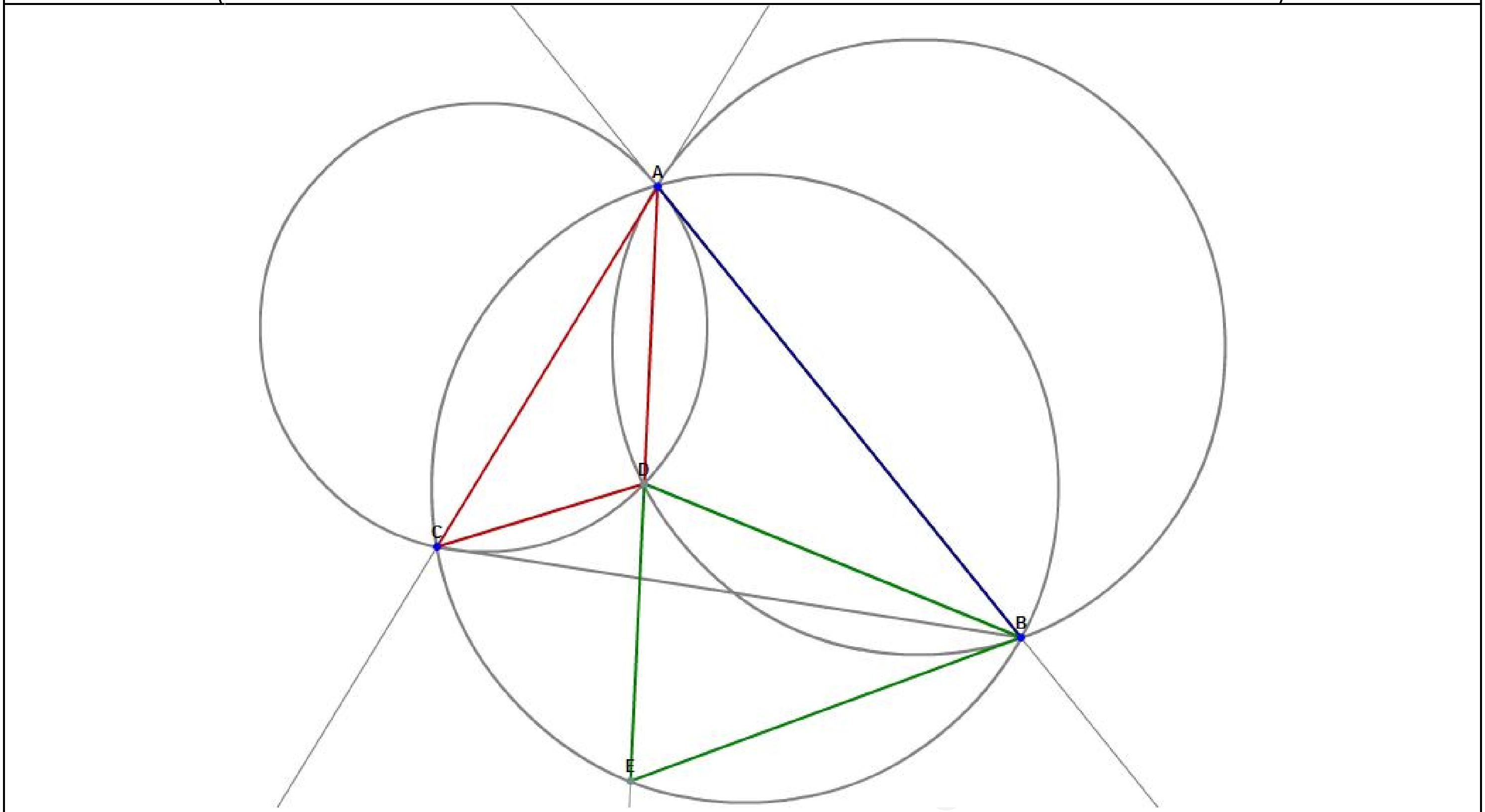
منه: $12\left(k^2+3k+3\right)=5556$ منه: $k^2+3k+3=463$ منه: $k^2+3k-460=0$

$\Delta=9+1840=1849$ منه: $k=\dfrac{-3+43}{2}=20$ أو $k=\dfrac{-3-43}{2}=-23\notin IN$

بالتالي: $a=41$ و $b=43$ و $c=45$

ونتحقق بسهولة أن: $41^2+43^2+45^2=5555$

Exercise 3 — تمرين 3



لدينا $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس الصغرى AB (لأن (AC) مماس للدائرة (S))

بينما $A\hat{D}B$ زاوية محيطية في نفس الدائرة تحصر القوس الكبرى AB (القوس المقابل للقوس الصغرى)

إذن : $B\hat{A}C + A\hat{D}B = ®$ منه : $B\hat{A}C = ® - A\hat{D}B = E\hat{D}B$ $\quad (1)$

وبما أن $A\hat{E}B$ و $A\hat{C}B$ زاويتان محيطيتان في الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تحصران نفس القوس فإن :

$A\hat{E}B = A\hat{C}B$ $\quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : ABC و DEB مثلثان متشابهان $\quad (*)$

نستنتج إذن أن : $A\hat{B}C = D\hat{B}E$ أي : $A\hat{B}D + D\hat{B}C = D\hat{B}C + C\hat{B}E$ منه : $A\hat{B}D = C\hat{B}E$

وبما أن : $C\hat{B}E = C\hat{A}E$ (زاويتان محيطيتان في الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تحصران نفس القوس)

فإن : $A\hat{B}D = C\hat{A}E$ $\quad (3)$

من جهة أخرى لدينا $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس الصغرى AC (لأن (AB) مماس للدائرة (T))

بينما $A\hat{D}C$ زاوية محيطية في نفس الدائرة تحصر القوس الكبرى AC

إذن : $B\hat{A}C + A\hat{D}C = ®$ إذن و من (1) نستنتج أن : $A\hat{D}C = A\hat{D}B$ $\quad (4)$

الآن من (3) و (4) نستنتج أن : ADC و ABD مثلثان متشابهان $\quad (**)$

أخيرا : من $(*)$ نستنتج أن $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$ و من $(**)$ نستنتج أن $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$

بالتالي : $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{AD}{AC}$ أي $AD = DE$ أي أن D منتصف $[AE]$