السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2014 الفرض الثاني الجمعة 30 نونبر 2012 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2013/2012

تمرين 1 — Exercise 1

نضع: $a=\frac{1}{p}$ و $b=\frac{1}{q}$ منه : $a+b=1$ و $0<a<1$ و $0<b<1$

و حيث أن: $(a+b)^2 \geq 4ab$ فإن أن: $0<ab\leq\frac{1}{4}$

- لدينا :

$$\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{q(q+1)}=\frac{1}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+1\right)}+\frac{1}{\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}+1\right)}=\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{a^2-1}{a+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{b^2-1}{b+1}+\frac{1}{b+1}$$

$$=a-1+b-1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=-1+\frac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)}=-1+\frac{3}{(a+1)(b+1)}$$

$$=-1+\frac{3}{ab+a+b+1}=-1+\frac{3}{ab+2}$$

منه :

$$0<ab\leq\frac{1}{4}\Rightarrow 2<ab+2\leq\frac{9}{4}\ \Rightarrow\frac{4}{9}\leq\frac{1}{ab+2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{4}{3}\leq\frac{3}{ab+2}<\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\leq -1+\frac{3}{ab+2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{3}\leq\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{q(q+1)}<\frac{1}{2}$$

- لدينا :

$$\frac{1}{p(p-1)}+\frac{1}{q(q-1)}=\frac{1}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-1\right)}+\frac{1}{\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}-1\right)}=\frac{a^2}{1-a}+\frac{b^2}{1-b}=\frac{a^2-1}{1-a}+\frac{1}{1-a}+\frac{b^2-1}{1-b}+\frac{1}{1-b}$$

$$=-a-1-b-1+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}=-3+\frac{1-b+1-a}{(1-a)(1-b)}=-3+\frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

$$=-3+\frac{1}{1-a-b+ab}=-3+\frac{1}{ab}$$

منه :

$$0<ab\leq\frac{1}{4}\ \Rightarrow\frac{1}{ab}\geq 4\Rightarrow -3+\frac{1}{ab}\geq 4\Rightarrow\frac{1}{p(p-1)}+\frac{1}{q(q-1)}\geq 1$$

يمكن إنجاز التمرين مباشرة ، لكن تغيير المجاهيل يسهل من إثبات المتفاوتة.

تمرين 2 — Exercise 2

نضع : $A=x^6+x^4-x^3-x+\frac{3}{4}$ ، منه :

$$A=\left(x^6-x^3+\frac{1}{4}\right)+\left(x^4-x^2+\frac{1}{4}\right)+\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

و بما أن : $A=0\quad\Rightarrow\quad x^3-\frac{1}{2}=x^2-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}=0\quad\Rightarrow\quad x=x^2=x^3=\frac{1}{2}$

و هذا غير ممكن (لأن: $\frac{1}{2}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^2$) فإن المتفاوتة قطعية أي : $A>0$

تمرين مكرر من الفرض الأول

تمرين 3 — Exercise 3

نعتبر الحدودية : $P(x)=ax^2+bx+c$

حيث : $a\neq 0$ و ($a\notin Z$ أو $b\notin Z$ أو $c\notin Z$) و $P(n)\in Z \quad \forall n\in Z$

نعتبر الحدودية : $Q(x)=P(x)-\frac{1}{2}x(x+1)=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)x+c$

نضع : $a'=a-\frac{1}{2}$ و $b'=b-\frac{1}{2}$ ، لنبين أن : $a'\in Z$ و $b'\in Z$ و $c\in Z$

- لدينا : $\boxed{0\in Z \Rightarrow P(0)\in Z \Rightarrow c\in Z}$
- إذن نستنتج أن : $a\notin Z$ أو $b\notin Z$ ، لدينا :

$$\begin{cases}1\in Z\\ -1\in Z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}P(1)\in Z\\ P(-1)\in Z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b\in Z\\ a-b\in Z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a+b)+(a-b)\in Z\\ (a+b)-(a-b)\in Z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a\in Z\\ 2b\in Z\end{cases}$$

نضع : $p=2a$ و $q=2b$ منه : $\begin{cases}a=\frac{p}{2} \;/\; p\in Z\\ b=\frac{q}{2} \;/\; q\in Z\end{cases}$

بما أن : $a+b\in Z$ أي : $\frac{p+q}{2}\in Z$ فإن $p+q$ عدد زوجي ، إذن لـ p و q نفس الزوجية

إذا افترضنا أنهما زوجيان فإننا سنستنتج أن $\begin{cases}a\in Z\\ b\in Z\end{cases}$ و هذا يناقض المعطيات

إذن p و q فرديان معا ، منه: $p=2k+1 \;/\; k\in Z$ و $q=2k'+1 \;/\; k'\in Z$

منه: $\boxed{a'=a-\frac{1}{2}=\frac{p-1}{2}=k\in Z}$ و $\boxed{b'=b-\frac{1}{2}=\frac{q-1}{2}=k'\in Z}$ و هذا ينهي البرهان

تمرين 4 — Exercise 4

سنستعمل الملاحظة التالية :

إذا كان $ABCD$ رباعيا دائريا و كانت $\left(C_1\right)$ دائرة مارة من A و B و $\left(C_2\right)$ دائرة مارة من C و D

حيث $\left(C_1\right)$ و $\left(C_2\right)$ تتقاطعان في M و N ، فإن : (AB) و (CD) و (MN) تتقاطع في نقطة واحدة

برهان: (سنستعمل مفهوم قوة نقطة عن دائرة)(في انتظار أن أجد طريقة أخرى)

لتكن E نقطة تقاطع (AB) و (CD)

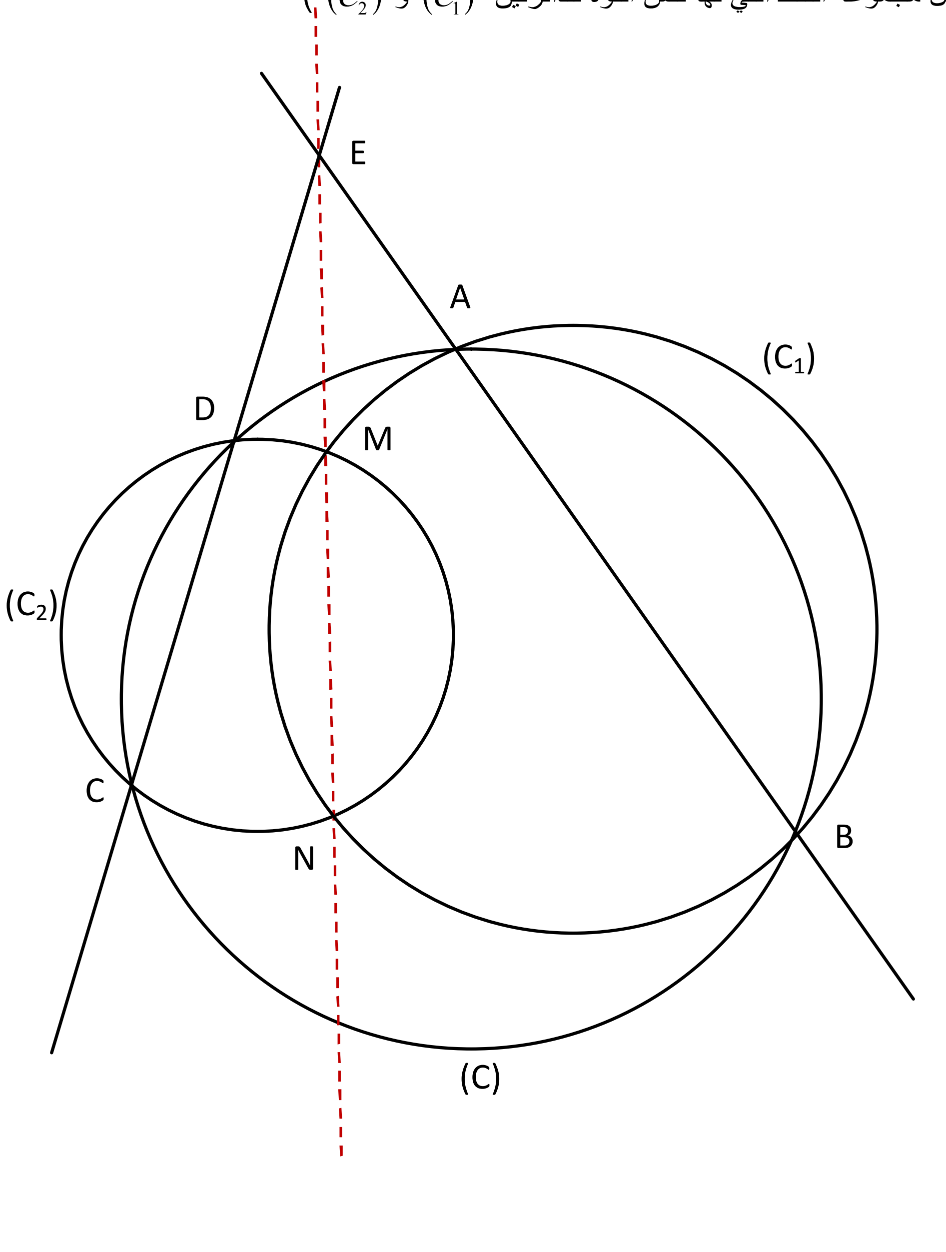
لدينا $\mathrm{P}\left(E,(C)\right)=EA\times EB=ED\times EC$

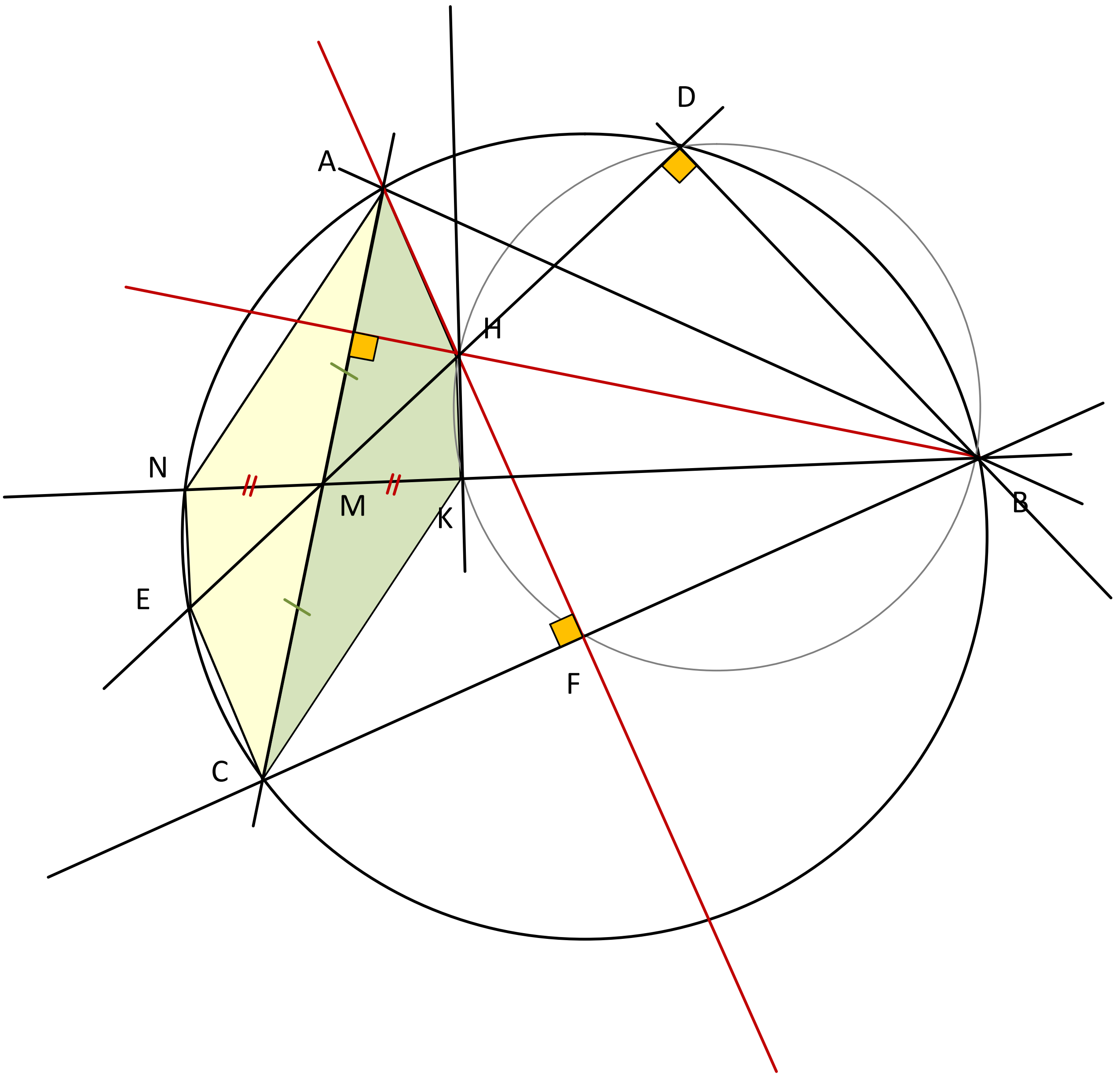
و $\mathrm{P}\left(E,\left(C_1\right)\right)=EA\times EB$ و $\mathrm{P}\left(E,\left(C_2\right)\right)=ED\times EC$

إذن : $\mathrm{P}\left(E,\left(C_1\right)\right)=\mathrm{P}\left(E,\left(C_2\right)\right)$

إذن $E\in(MN)$

(لأن (MN) يمثل مجموعة النقط التي لها نفس القوة للدائرتين $\left(C_1\right)$ و $\left(C_2\right)$)





(E نقطة تقاطع (DH) و الدائرة (C))

سنبرهن أن $(HK)\perp(KB)$

لدينا $ANCK$ متوازي أضلاع منه ل N منتصف $[NK]$

باستعمال دايرية الرباعي $DECB$ نجد أن : $E\hat{C}B=\pi-E\hat{D}B=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ و $D\hat{E}C=\pi-D\hat{B}C$

منه $(HF)//(EC)$ منه : $M\hat{E}C=M\hat{H}A$ و $M\hat{A}H=M\hat{C}E$ و لكون $AM=MC$

فإن AMH و MCE متقايسان منه $AHCE$ متوازي أضلاع($AH=CE$ و $(AH)//(CE)$

إذن M منتصف $[EH]$

منه MNE و MHK متقايسان(زاوية و ضلعان متقايسان)

منه: $H\hat{K}M = M\hat{N}E = \dfrac{\pi}{2}$

إذن $BDHK$ دائري (1)

و باستعمال التماثل المركزي نجد بسهولة أن مماثل الرباعي $ANEC$ هو $AHKC$

إذن $AHKC$ رباعي دائري (2)

من (1) و (2) الخاصية المدرجة في البداية نستنتج المطلوب.