Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات الفرض الأول الجمعة 28 نونبر 2014 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2015/2014

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}+2xy = \dfrac{(a+b)^2}{2}+2xy$

منه : $2(x+y)^2 = (a+b)^2+4xy$

وبما أن : $4xy \le (x+y)^2$ فإن : $4xy+(a+b)^2 \le (x+y)^2+(a+b)^2$ منه : $2(x+y)^2 \le (x+y)^2+(a+b)^2$

منه : $(x+y)^2 \le (a+b)^2$

ولكون a و b و x و y أعداد موجبة فإننا نستنتج أن : $x+y \le a+b$ بالتالي : $\boxed{\dfrac{x+y}{2} \le \dfrac{a+b}{2}}$

تمرين 2 — Exercise 2

للتبسيط نرمز للنظمة (S) بـ $\begin{cases} x^2+x = y^3-y \\ y^2+y = x^3-x \end{cases}$ ، أولا ندرس بعض الحالات الخاصة:

- إذا كان $x=0$ أو $x=-1$ فإن : منه : $\begin{cases} 0 = y^3-y \\ y^2+y=0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} y(y-1)(y+1)=0 \\ y(y+1)=0 \end{cases}$ أو $y=0$ أو $y=-1$ (1 لن تحقق المعادلتين معا)
- إذا كان $\begin{cases} x \ne -0 \\ x \ne -1 \end{cases}$ فإن :

من جهة : (S) ، بما أن $\begin{cases} x \ne -0 \\ x \ne -1 \end{cases}$ فإن : $x(x+1) \ne 0$ منه : $y(y+1)(y-1) \ne 0$ منه $\begin{cases} y \ne 0 \\ y \ne -1 \\ y \ne 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = y(y+1)(y-1) \\ x(x+1)(x-1) = y(y+1) \end{cases}$

الآن نستنتج بقسمة طرفي النظمة على : $x+y=xy$ (*) منه $\begin{cases} x^2+x = y^3-y \\ y^2+y = x^3-x \end{cases} \Rightarrow x-1 = \dfrac{1}{y-1} \Rightarrow xy-x-y+1=1$

$(S) \Rightarrow (x^2+x)+(x^3-x) = (y^3-y)+(y^2+y) \Rightarrow x^2+x^3 = y^3+y^2$

الآن و من جهة أخرى : $(S) \Rightarrow (x^2-y^2)+(x^3-y^3)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y+x^2+xy+y^2)=0$

$(S) \Rightarrow (x=y)\ ou\ (x^2+xy+y^2+x+y=0)$

إذا كان $x=y$ فإن النظمة تصبح : $\begin{cases} x=y \\ x^3-x^2-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0\ ou\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0\ ou\ x=-1\ ou\ x=2 \end{cases}$

إذا كان $x^2+xy+y^2+x+y=0$ فإننا نستنتج من (*) أن : $x^2+2xy+y^2=0$ منه : $(x+y)^2=0$ منه : $x+y=0$

ومن (*) نستنتج من جديد أن $xy=0$ و هذا غير ممكن لأننا في حالة $\begin{cases} x \ne -0 \\ x \ne -1 \end{cases}$ وسبق وبرهنا أن $y \ne 0$

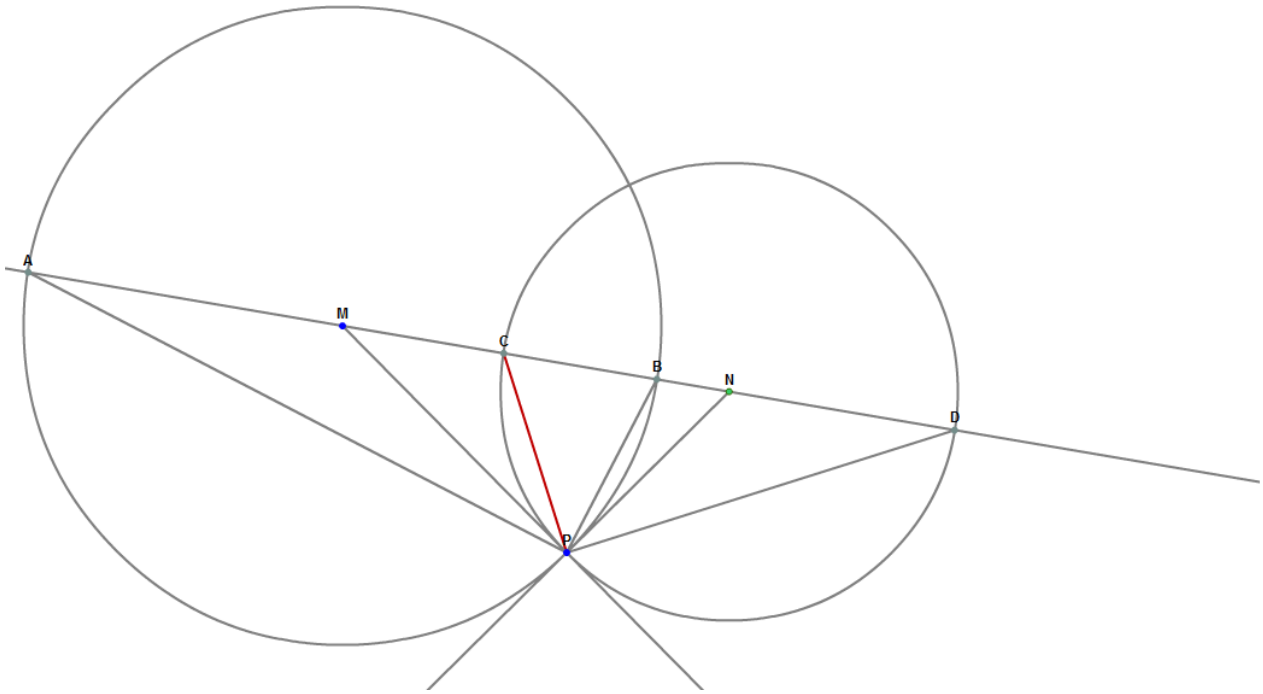
خلاصة بعد التحقق من الحلول المحصل عليها بالاستنتاجات السابقة يكون لدينا : $\boxed{S = \{(0;0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1);(2;2)\}}$

تمرين يتطلب دقة كبيرة في التحليل الرياضي و الاستدلال السليم مع الحرص على دراسة كل الحالات الممكنة باستعمال مبادئ المنطق (العطف ، فصل الحالات...)

يمكن حل النظمة بطريقة أخرى لكننا فضلنا إزاحة بعض الحالات التي إن لم يتم عزلها في دراسة مستقلة ينبثق منها حالات كثيرة.

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

Exercise 3 | تمرين 3



لدينا K_M دائرة قطرها $[AB]$ و $P \in K_M$ إذن APB مثلث قائم الزاوية في النقطة P.

إذن يجب أن نبرهن أن : $C\hat{P}B = \frac{\pi}{4}\ rad$

لدينا MNP مثلث قائم الزاوية في النقطة P منه (NP) مماس للدائرة K_M و (MP) مماس للدائرة K_N

في الدائرة K_M الزاويتان $B\hat{A}P$ و $B\hat{P}N$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس PB إذن : $B\hat{P}N = B\hat{A}P$

أيضا في الدائرة K_N الزاويتان $C\hat{D}P$ و $M\hat{P}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس PC إذن : $M\hat{P}C = C\hat{D}P$

وبما أن $MA = MP$ و $NP = ND$ فإن : $B\hat{P}N = M\hat{P}A$ و $C\hat{D}P = N\hat{P}D$

للتبسيط نضع : $B\hat{A}P = a$ و $C\hat{D}P = d$ و $C\hat{P}B = x$

لدينا في المثلث ADP : $B\hat{A}P + A\hat{P}D + A\hat{D}P = \pi$ ، أي $a + \left(a + \frac{\pi}{2} + d\right) + d = \pi$ أي : $a + d = \frac{\pi}{4}$

ولكون $M\hat{P}N = \frac{\pi}{2}$ فإن : $a + x + d = \frac{\pi}{2}$ بالتالي : $x = \frac{\pi}{2} - (a + d) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ rad$ و هذا ينهي البرهان.

الحلول المقترحة هي حلول شخصية و ليست حلولا رسمية