السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات الفرض الرابع الجمعة 23 يناير 2015 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2014/2015

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $(x^2-6x+8)P(x)=(x^2+2x)P(x-2)$ أي : $(x-2)(x-4)\,P(x)=x(x+2)P(x-2)$

إذن : $8\,P(0)=0$ منه : $P(0)=0$

و أيضا : $24\,P(-2)=0$ أي : $P(-2)=0$

إذن : 0 و -2 جذران للحدودية $P(x)$ إذن توجد حدودية $Q(x)$ حيث: $P(x)=x(x+2)Q(x)$

منه : $P(x-2)=(x-2)\,x\,Q(x-2)$

نعوض في العلاقة المعطاة فنجد: $(x-2)(x-4)\,x\,(x+2)Q(x)=x^2\,(x+2)(x-2)Q(x-2)$

منه : $(x-4)\,Q(x)=x\,Q(x-2)$

إذن : $-4\,Q(0)=0$ و $0=4Q(2)$ منه : $Q(0)=Q(2)=0$ إذن 0 و 2 جذران للحدودية $Q(x)$

إذن توجد حدودية $H(x)$ حيث : $Q(x)=x(x-2)H(x)$

نعوض من جديد فنجد : $(x-4)\,x\,(x-2)H(x)=x\,(x-2)(x-4)H(x-2)$ منه : $H(x)=H(x-2)$

الآن باعتبار الحدودية : $G(x)=H(x)-H(0)$

سنستنتج أن : $G(x-2)=H(x-2)-H(0)=H(x)-H(0)=G(x)$

أكثر من ذلك: سنجد أن : $G(0)=0$ منه : $G(2)=G(0)=0$ و $G(4)=G(2)=0$ و $G(6)=G(4)=0$ و ... $G(2n)=0$

حيث $n\in IN$ (يمكننا استعمال برهان بالترجع لدقة أكثر في الجواب)

إذن الحدودية $G(x)$ تقبل عددا غير منته من الجذور و هذا لا يمكن إلا إذا كانت هي الحدودية المنعدمة.

بالتالي: $H(x)=H(0)$، إذن و بوضع : $H(0)=a$ سنستنتج أن : $P(x)=a\,x^2\,(x^2-4)$

عكسيا نتحقق بسهولة أن كل حدودية من الشكل $a\,x^2\,(x^2-4)$ حيث $a\in IR$ تحقق شرط المسألة

خلاصة : الدوال الحدودية التي تجيب عن السؤال هي كل الدوال على الشكل : $P(x)=a\,x^2\,(x^2-4)$ حيث $a\in IR$

- استعملنا المحددة لتعميل الحدودية : x^2-6x+8 قصد استغلال جذورها في المسألة (الاختزال...)
- يمكننا الاختزال عندما يتعلق الأمر بالحدوديات لأننا في الحقيقية نختزل بحدودية و ليس بعدد (لذلك ليس هناك حاجة لدراسة الحالات. مثلا عندما نريد الاختزال بـ $x-2$ لن ندرس حالة $x=2$ و حالة $x\neq 2$)
- معلومة مهمة في هذا التمرين: للبرهان أن حدودية منعدمة نبرهن أن لها عدد لا منتهيا من الجذور

Exercise 2 — تمرين 2

لتكن x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا، نضع : $a=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ و $b=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$

و $m=\min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x};\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)$

لدينا : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=3+a+b$

و $a^2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+2b$

و $b^2=\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)^2=\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+2a$

- إذا كان $a\le b$ فإن : $m=a$، ومنه :

$$m^2-(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=a^2-(3+a+b)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+2b-3-a-b=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-3\right)+(b-a)$$

و بما أن : $b-a\ge 0$ و $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}.\frac{y^2}{z^2}.\frac{z^2}{x^2}}$ أي : $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge 3$ فإن : $m^2\ge(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

- إذا كان $b<a$ فإن : $m=b$، ومنه :

$$m^2-(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=b^2-(3+a+b)=\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+2a-3-a-b=\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}-3\right)+(a-b)$$

و بما أن : $a-b>0$ و $\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}\ge 3$ فإن : $m^2>(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

حسب الحالتين المدروستان ف $m^2-(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$ تتحقق إذا وفقط إذا كان :

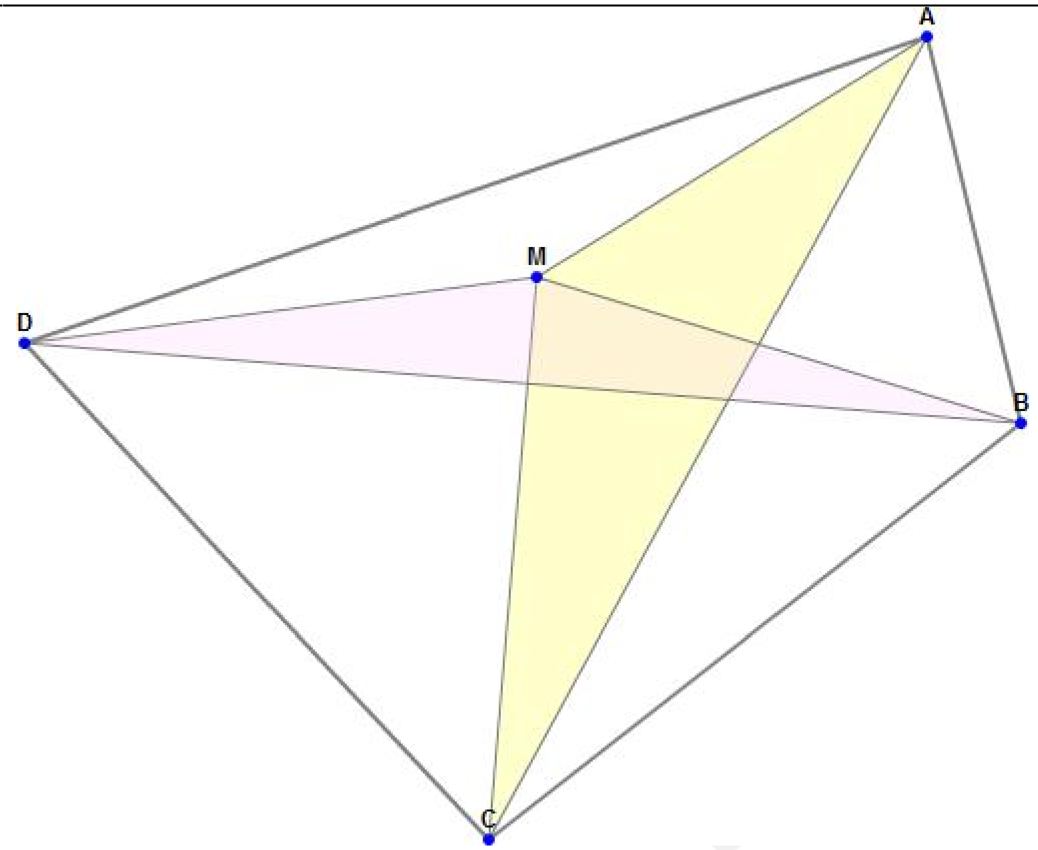
$$\begin{cases}\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-3=0\\ b-a=0\\ a\le b\end{cases}$$ أو $$\begin{cases}\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}-3=0\\ a-b=0\\ b<a\end{cases}$$ (هذه الحالة غير ممكنة)

أي : $a=b$ و $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}=3$ ، هذه المتساوية الأخيرة نعلم أنها تتحقق إذا وفقط إذا كان : $\frac{x^2}{y^2}=\frac{y^2}{z^2}=\frac{z^2}{x^2}=1$

بالتالي التساوي يتحقق إذا وفقط إذا كان $x=y=z$

عند فصل الحالات يجب أن لا ندرج في حالة ثانية حالة سابقة، لذلك في الحالة الثانية أخذنا $b<a$ و ليس $b\le a$ ، قد تم قبول ذلك تجاوزا ، لكن الدقة الرياضية تستوجب هذا التفصيل.

Exercise 3 | تمرين 3



لدينا : $\dfrac{\tan(A\hat{M}C)}{\tan(B\hat{M}D)} = \dfrac{S(AMC)}{S(BMD)}$ يعني : $\dfrac{\dfrac{\sin(A\hat{M}C)}{\cos(A\hat{M}C)}}{\dfrac{\sin(B\hat{M}D)}{\cos(B\hat{M}D)}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin(A\hat{M}C)\times MA\times MC}{\frac{1}{2}\sin(B\hat{M}D)\times MB\times MD}$

بما أن $0° < A\hat{M}C < 180°$ لكون M لا تنتمي لأي قطر من قطري الرباعي فإن $\dfrac{\dfrac{1}{\cos(A\hat{M}C)}}{\dfrac{1}{\cos(B\hat{M}D)}} = \dfrac{MA\times MC}{MB\times MD}$

منه : $MA\times MC\times\cos(A\hat{M}C) = MB\times MD\times\cos(B\hat{M}D)$

ولدينا حسب مبرهنة الكاشي في المثلثين AMC و BMD :

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - MA\times MC\times\cos(A\hat{M}C)$ و $BD^2 = MB^2 + MD^2 - MB\times MD\times\cos(B\hat{M}D)$

من هذه المتساويات الثلاث نستنتج أن : $MA^2 + MC^2 - AC^2 = MB^2 + MD^2 - BD^2$

بالتالي : $AM^2 + MC^2 + BD^2 = AC^2 + BM^2 + MD^2$

لتمرين سهل رغم صعوبة المتساوية المراد البرهان عنها، لأنه بتتبع المعطيات نصل مباشرة للنتيجة دون مجهود يذكر.