بتاريخ : 2015/01/30 02:20 م

01.

نحسب النهايات التالية :

.1

- $\lim\limits_{x\to 3} x^4 - x^3 + 7 = 3^4 - 3^3 + 7 = 115$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x^5 - 7x^4 + x^2 + 1 \lim\limits_{x\to -\infty} 2x^5 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-3x^3+1\right)^4\left(2x-5\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-3x^3\right)^4 \times \left(2x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-3\right)^4 x^{13} = +\infty$

.2

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x + 6}{2 - x^7} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{-x^7} = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{3}{x^5} = 0$
- $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5} = \lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \frac{\cancel{x-\sqrt{5}}}{\cancel{\left(x-\sqrt{5}\right)}\left(x+\sqrt{5}\right)} = \lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \frac{1}{\left(x+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} - x^3 = +\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} -x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3-x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{\cancel{3-x}}{\cancel{\left(x-3\right)}\left(x+3\right)} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{6}$
- $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{x+2}{x-7} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 7^-} x+2 = 9$ و $\lim\limits_{x\to 7^-} x-7 = 0^-$
- $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-x}{\left(x-4\right)^6} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 4} 3-x = -1$ و $\lim\limits_{x\to 4}\left(x-4\right)^6 = 0^+$

.3

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x + 4 = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x - |4-x| = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x - \left(x-4\right)$ لأن $|4-x| = -\left(4-x\right)$ و $x \to +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x-1}{|4-2x|} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x-1}{4-2x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}}{-2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}$ لأن $|4-2x| = 4-2x$ و $x \to -\infty$

02.

أحسب النهايات التالية :

.1

- $\lim\limits_{x\to +\infty} 5x - 3 + \sqrt{\frac{3x+6}{x-1}} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} 5x-3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{3x+6}{x-1}} = \sqrt{3}$ (لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x+6}{x-1} = 3$).
- $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\cancel{x-5}}{\cancel{\left(x-5\right)}\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{4-x^2}}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{4-x^2}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{-(2+x)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)} = -\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} -(2+x) = -4$ و $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \sqrt{4-x^2} = 0^+$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{9x^2-18x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x+|x|\sqrt{9-\frac{18}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{9-\frac{18}{x}}\right) = +\infty$ (لأن $|x|=-x$ و $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{9-\frac{18}{x}}\right) = 2-3=-1$).

-

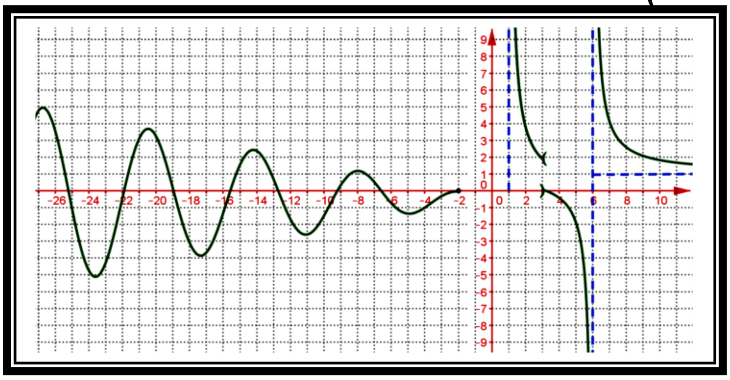
$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{9x^2-18x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(3x-\sqrt{9x^2-18x}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2-18x}\right)}{3x+\sqrt{9x^2-18x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9x^2-\left(9x^2-18x\right)}{3x+\sqrt{9x^2-18x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{18x}{3x+\sqrt{9x^2-18x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{18x}{3x+|x|\sqrt{9-\frac{18}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{18\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3+\sqrt{9-\frac{18}{x}}\right)} = \frac{18}{6} = 3$

(لأن $|x|=x$ و $x\to+\infty$

.2

- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(4x)}{7x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(4x)}{x}\times\frac{\cancel{x}}{7\cancel{x}} = 4\times\frac{1}{7} = \frac{4}{7}$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{3x}{\tan(5x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\tan(5x)}\times3 = \frac{1}{5}\times3 = \frac{3}{5}$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(9x)}{\tan(4x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(9x)}{x}\times\frac{x}{\tan(4x)} = 9\times\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x\to0} \sin x\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \sin x\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\times\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}\left(t=\sqrt{x}; x\to0^+ \Rightarrow t\to0^+\right)$.
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



.03

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

1. حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f .

مبيانيا لدينا : $D_f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left]1,3\right[\cup \left]3,6\right[\cup \left]6,+\infty\right[$

2. استنتج مبيانيا نهايات f عند محدات D_f وكذلك في 1 .

- f ليس لها نهاية عند $-\infty$
- $\lim_{x\to -2^-} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$ و $\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 6^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 6^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$

04.

1. حدد m علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=mx+\dfrac{x^2-9}{x-3} & ; x>3 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & ; x<3 \end{cases}$$

نحدد نهاية f على يمين 3

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} mx+\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+} mx+\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+} mx+x+3=3m+6$$

ومنه : $\ell_d=3m+6$

نحدد نهاية f على يسار 3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

ومنه : $\ell_g=\dfrac{1}{4}$

لكي تكون للدالة لها نهاية في 3 يجب أن يكون $\ell_d=\ell_g \Leftrightarrow 3m+6=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m=-\dfrac{23}{12}$

خلاصة : f لها نهاية في 3 يجب أن تكون $m=-\dfrac{23}{12}$

05.

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

1. بين أن : $\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\le f(x)\le 1$.

- لدينا :

$$-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow x^2-1\le x^2\cos x\le x^2+1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\left(x^2-1\right)\le \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+\cos x\right)\le \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\left(x^2-1\right)\le \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+\cos x\right)\le 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}\le f(x)\le 1$$

ومنه : $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\le f(x)\le 1$

2. استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

من خلال ما سبق : $\frac{x^2-1}{x^2+1} \le f(x) \le 1$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$.

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}} + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \quad ; \quad \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7} = 0\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

بتاريخ: 2015/01/30 02:21 م