درس : النهايات

I. تذكير و تمهيد:

A. العلاقة بين القيمة المطلقة و المجالات:

1. تذكير: ببعض الحروف: α, β , ε

α يقرأ : أَلْفَ alpha. β يقرأ بِيطَ béta . ε يقرأ إِبْسِلُونْ epsilon

نقصد ب α موجب قطعا : شعاع موجب قطعا.

نقصد ب $\forall\varepsilon > 0$ مهما يكن ε شعاع موجب قطعا .

نقصد ب $\exists\alpha > 0$ يوجد α شعاع موجب قطعا .

عندما نكتب عدد موجب قطعا على الشكل A أو B نقصد بهذه الكتابة عدد موجب كبير جدا مما نتصور.

2. مجال $I(x_0,\alpha)$: الذي مركزه x_0 و شعاعه α :

مثال :

- الكتابة $|x-2| < \alpha$ تعني $x \in]2-\alpha, 2+\alpha[$ أو أيضا $x \in I(2,\alpha)$.
- $]2-\alpha, 2+\alpha[$ أو أيضا $I(2,\alpha)$ يسمى المجال الذي مركزه 2 و شعاعه α.

بصفة عامة نكتب : $I(x_0,\alpha) =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

3. مجال $I^*(x_0,\alpha)$: المنقط في x_0 و الذي مركزه x_0 و شعاعه α.

- الكتابة $0 < |x-2| < \alpha$ تعني $|x-2| < \alpha$ و $|x-2| \neq 0$ تعني كذلك $x \in]2-\alpha, 2+\alpha[\setminus \{2\}$ أو أيضا $x \in I^*(2,\alpha)$.
- $]2-\alpha, 2+\alpha[$ أو أيضا $I(2,\alpha)$ يسمى المجال الذي مركزه 2 و شعاعه α.

بصفة عامة نكتب : $I^*(x_0,\alpha) =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\setminus \{x_0\}$.

B. دالة معرفة بجوار نقطة a . على يمين a . على a .

1. مفردات:

- f معرفة بجوار a ثم على يمين a ثم على يسار a .

إذ وجد شعاع موجب قطعا (أي $r > 0$) حيث :

أ- $I^*(a,r) =]a-r, a+r[\setminus \{a\} =]a-r, a[\cup]a, a+r[\subset D_f$ نقول إن f دالة معرفة بجوار a.

ب- $]a, a+r[\subset D_f$ نقول إن : f دالة معرفة على يمين a.

ج- $\exists r > 0 ;]a-r, a[\subset D_f$ نقول إن : f دالة معرفة على يسار a.

- f معرفة بجوار $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا وجد عدد حقيقي b أو c حيث :

أ- $]b, +\infty[\subset D_f$ نقول إن f دالة معرفة بجوار $+\infty$. (يمكن أن يكون المجال مغلق من جهة b)

ب- $]-\infty, c[\subset D_f$ نقول إن f دالة معرفة بجوار $-\infty$. (يمكن أن يكون المجال مغلق من جهة c)

2. أمثلة :

a. **مثال 1 :** $f(x) = \frac{1}{x}$ لدينا : $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

// f معرفة بجوار 0 و على يمين 0 و على يسار 0 و بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.

b. **مثال 2 :** $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}$. لدينا: $D_f = \{0\} \cup [2, +\infty[$.

// f معرفة على يسار 2 . f معرفة بجوار $+\infty$. f معرفة كذلك بجوار 3 .

// f غير معرفة بجوار 0 و غير معرفة على يمين 0 وغير معرفة على يسار 0 .

c. **مثال 3 :** $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$. لدينا: $D_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

// f معرفة بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$ و على يسار -2 و على يمين 1 . f غير معرفة بجوار 1 و غير معرفة على يسار 1

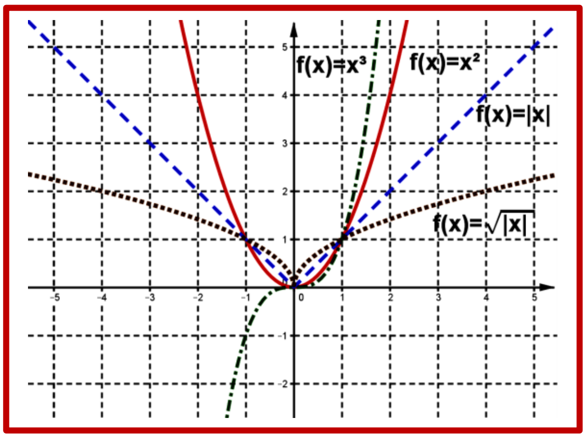
II. النهاية هي 0 لدالة f في نقطة $x_0 = 0$ (أي عندما يؤول x إلى $x_0 = 0$)

A. نهاية الدوال المرجعية في النقطة $x_0 = 0$

1. تعريف:

الدوال التالية : $f(x) = x$ و $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ و $f(x) = x^n \ ; (n \in \mathbb{N}^*)$ و $f(x) = |x|$ و $f(x) = \sqrt{|x|}$
تسمى دوال مرجعية.

تمثيل المبياني لهذه الدوال هو:



2. نشاط:

f دالة مرجعية :

1. ماذا تلاحظ عن قيم x التي أعطيت في الجدول ؟
2. أتمم الجدول التالي.
3. ماذا تلاحظ عن قيم $f(x)$ التي حصلت عليها بالنسبة لكل دالة مرجعية ؟

جواب:

1. نلاحظ أن قيم x تقترب من 0 .
2. نتمم الجدول (أنظر الجدول).
3. نلاحظ عن قيم $f(x)$ تقترب من 0.

	$\longrightarrow$					$\longleftarrow$		
$x \rightarrow$ / $f(x) \downarrow$	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	$\rightarrow$		$\leftarrow$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$f(x) = x$				$\rightarrow$		$\leftarrow$			
$f(x) = x^2$				$\rightarrow$		$\leftarrow$			
$f(x) = x^3$				$\rightarrow$		$\leftarrow$			
$f(x) = \|x\|$				$\rightarrow$		$\leftarrow$			
$f(x) = \sqrt{\|x\|}$				$\rightarrow$		$\leftarrow$			

3. مفردات :

- نقول إن x يؤول إلى 0 . ونكتب : $x \to 0$
- نقول إن : $f(x)$ تؤول إلى 0 . و نكتب : $f(x) \to 0$.
- نلخص ذلك بقولنا أن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى 0 .
- نقول كذلك أن نهاية $f(x)$ هي 0 عندما x تؤول إلى 0 . نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

4. تعريف:

f دالة عددية معرفة بجوار 0 (أي $I^*(0,r) =]-r,r[\setminus \{0\} =]-r,0[\cup]0,r[$).
نقول إن : $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى 0 لنعني أن: $\forall \varepsilon > 0 , \exists \alpha > 0 , 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
نكتب : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ نقرأ : نهاية $f(x)$ هي 0 عندما x يؤول إلى 0.

5. أمثلة :

a. مثال 1 : $f(x)=x^2$ نبين أن : $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$.

ليكن $\varepsilon>0$ و $0<|x|$ (1) لدينا: $|f(x)|=|x^2|=|x|^2<\varepsilon$ ومنه : $|x|<\sqrt{\varepsilon}$ (2) . من خلال (1) و (2) نحصل على $0<|x|<\sqrt{\varepsilon}$.

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $\varepsilon>0$ يوجد α حيث $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$. أو أيضا : نقول لكل $\varepsilon>0$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$.

b. مثال 2 : $f(x)=\sqrt{|x|}$ نبين أن : $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0$.

ليكن $\varepsilon>0$ و $0<|x|$ (1) لدينا: $|f(x)|=\left|\sqrt{|x|}\right|<\varepsilon$ و منه : $|x|<\varepsilon^2$ (2). من خلال (1) و (2) نحصل على $0<|x|<\varepsilon^2$

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $\varepsilon>0$ يوجد α حيث $\alpha=\varepsilon^2$. أو أيضا : نقول لكل $\varepsilon>0$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\varepsilon^2$.

c. مثال 3 : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ نبين أن : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x-1}=0$.

لدينا : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ نأخذ : $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$ ومنه : $\begin{cases}-1<x<1\\ x\neq0\ ;\ x\neq1\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}-2<x-1<0\\ x\neq0\ ;\ x\neq1\end{cases}$ إذن :

$\begin{cases}-2<x-1<0<2\\ x\neq0\ ;\ x\neq1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}|x-1|<2\\ x\neq0\ ;\ x\neq1\end{cases}$ (1)

ليكن $\varepsilon>0$ و $0<|x|$ (2) لدينا: $|f(x)|=\left|\dfrac{x}{x-1}\right|=\dfrac{|x|}{|x-1|}<\varepsilon$ ومنه : $|x|<|x-1|\varepsilon$ (3) . من خلال (1) و (2) و (3)

نحصل على $0<|x|<|x-1|\varepsilon<2\varepsilon$.

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $\varepsilon>0$ يوجد α حيث $\alpha=\inf(1,2\varepsilon)$. أو أيضا : نقول لكل $\varepsilon>0$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\inf(1,2\varepsilon)$.

B. خاصيات : (نهاية الدوال المرجعية في 0):

1. خاصيات :

a. $\lim\limits_{x\to0}x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x^3=0$ .... $\lim\limits_{x\to0}x^n=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ و $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0$.

b. f و g و h دوال عددية معرفة بجوار 0 (أي $]-r,r[\setminus\{0\}$ ضمن D_f و D_g و D_h).

إذا كان $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}h(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

2. مثال :

$f(x)=x^2\sin x$. نبين أن : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

لدينا : $-1\le\sin x\le1$ إذن $-x^2\le x^2\sin x\le x^2$.

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ إذن $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin x=0$.

خلاصة: $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin x=0$

III. النهاية ℓ عندما يؤول x إلى 0:

1. تعريف :

f دالة معرفة بجوار 0. $]-r,r[\setminus\{0\}\subset D_f$. مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى 0 لنعني أن : $f(x)-\ell$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0.

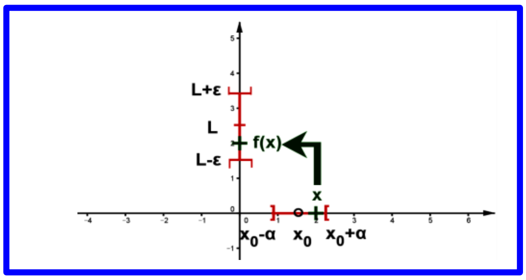
أو أيضا : $\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\alpha>0\ ,\ 0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell$

2. أمثلة :

نعتبر الدالة: $f(x)=x+3$. نبين أن : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$.

ليكن: $\varepsilon>0$ و $0<|x|$ (1) لدينا: $|f(x)-\ell|=|f(x)-3|=|x+3-3|=|x|<\varepsilon$ ومنه : $|x|<\varepsilon$ (2) . من خلال (1) و (2) نحصل على $0<|x|<\varepsilon$.



وفي هذه الحالة :

نقول لكل $\varepsilon>0$ يوجد α حيث $\alpha=\varepsilon$ أو أيضا نقول لكل $\varepsilon>0$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\varepsilon$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}x+3=3$

ملحوظة : إذا اعتبرنا $f(x)=x+c$. بنفس الطريقة نبين أن : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=c$

IV. نهاية دالة عددية f بجوار x_0:

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$:

1. تعريف :

f دالة معرفة بجوار x_0. (أي $]x_0-r,x_0+r[\setminus\{x_0\}\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى x_0 لنعني أن : $f(x)-\ell$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى x_0.

أو أيضا : $\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\alpha>0\ ,\ 0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$

2. أمثلة : نعتبر الدالة: $f(x)=x$.

نبين أن : $\lim\limits_{x\to -5}f(x)=-5$. لكل $\varepsilon>0$ نبحث هل يوجد $\alpha>0$ مع $0<|x-(-5)|<\alpha$ يعطينا $|f(x)-(-5)|<\varepsilon$

ليكن: $\varepsilon>0$ و $0<|x-(-5)|$ (1)

لدينا: $|f(x)-\ell|=|f(x)-(-5)|=|x-(-5)|<\varepsilon$ ومنه : $|x-(-5)|<\varepsilon$ (2) . من خلال (1) و (2) نحصل على $0<|x-(-5)|<\varepsilon$.

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $\varepsilon>0$ يوجد α حيث $\alpha=\varepsilon$. أو أيضا : نقول لكل $\varepsilon>0$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\varepsilon$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to -5}x=-5$

ملحوظة : إذا اعتبرنا $f(x)=x$. بنفس الطريقة نبين أن : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=x_0$ مع $x_0\in\mathbb{R}$

3. نتيجة : $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ لكل x_0 من $\mathbb{R}$.

4. خاصيات:

f و g و h دوال عددية معرفة بجوار x_0. (أي $]x_0-r,x_0+r[\setminus\{x_0\}\subset D_f$). مع $r>0$.

a. كل دالة f لها نهاية ℓ فهذه النهاية وحيدة.

b. إذا كان $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

c. إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$.

d. إذا كان $|f(x)-\ell|\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

5. أمثلة :

- مثال 1 : أحسب : $\lim\limits_{x\to -5}|x|$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to -5}x=-5$ (حسب المثال السابق) إذن : $\lim\limits_{x\to -5}|x|=|-5|=5$

- مثال 2 : بين أن $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x+7=7$.

لدينا $-x^2\le x^2\sin x\le x^2$ إذن : $-x^2+7\le x^2\sin x+7\le x^2+7$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}-x^2+7=7$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^2+7=7$ إذن : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x+7=7$. (حسب الخاصية : b)

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x+7=7$.

- مثال 3 : أحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)$.

نعلم أن : $|\sin x+\cos x|\le|\sin x|+|\cos x|\le 1+1$ إذن : $\left|\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)\right|=\left|\frac{x}{2}\right||\sin x+\cos x|\le\left|\frac{x}{2}\right|\times 2$

و منه : $\left|\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)\right|\le|x|$ أي $|f(x)|\le|x|$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ و منه : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)=0$. حسب الخاصية c .

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)=0$

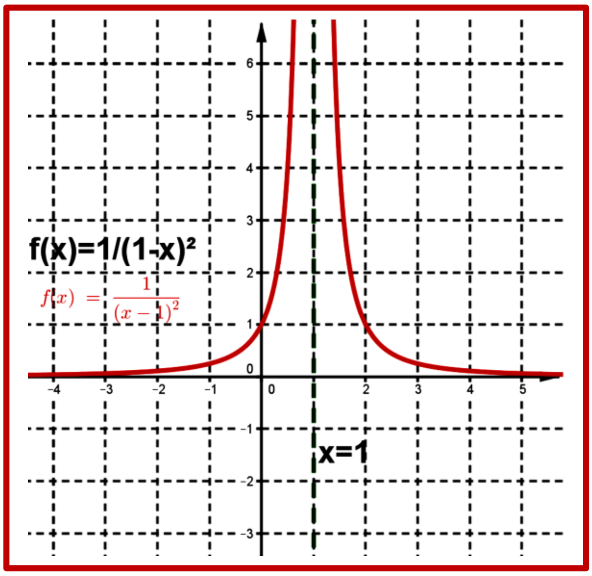
B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$:

1. نشاط: لنعتبر الدالة $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.

مجموعة تعريف f هي : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

الرسم (3) يمثل منحنى الدالة f .

استنتج مبيانيا نهاية الدالة f في 1. أتمم ما يلي : $\lim\limits_{x\to ....}f(x)=.....$



2. تعاريف :

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists\alpha>0,0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow f(x)>A$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists\alpha>0,0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow f(x)<-A$.

3. أمثلة : نبين أن : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.

لكل $A>0$ نبحث هل يوجد $\alpha>0$ يحقق $0<|x|<\alpha$ يعطينا $f(x)>A$

ليكن: $A>0$ و $0<|x|$ (1)

لدينا: (2) ; $f(x)>A\Rightarrow\frac{1}{x^2}>A\Rightarrow x^2<\frac{1}{A}\Rightarrow|x|^2<\frac{1}{A}\Rightarrow|x|<\sqrt{\frac{1}{A}}$

حسب العلاقة (1) و (2) نحصل على : $0<|x|<\sqrt{\frac{1}{A}}=\alpha$.

وفي هذه الحالة :

نقول لكل $A>0$ يوجد α حيث $\alpha=\sqrt{\frac{1}{A}}$. أو أيضا : نقول لكل $A>0$ يكفي أن نأخذ $\alpha=\sqrt{\frac{1}{A}}$.

خلاصة : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

V. النهاية على اليمين – النهاية على اليسار:

A. النهاية على اليمين في النقطة x_0 - النهاية على اليسار في النقطة x_0 .

1. نشاط :

لنعتبر الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ هي معرفة على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

- f معرفة على يمين 1 لأن : $]1,2[$ ضمن D_f . أتمم الجدول رقم (أ). ماذا تلاحظ عندما x يؤول إلى 1 بقيم أكبر من 1 ؟
- f معرفة على يمين 1 لأن : $]0,1[$ ضمن D_f . أتمم الجدول رقم (ب). ماذا تلاحظ عندما x يؤول إلى 1 بقيم أصغر من 1 ؟

جدول رقم 4										
	x	0,99	0,999	0,9999	$\rightarrow$		$\leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
	$f(x)$									
		الجدول (ب)					الجدول (أ)			

2. مفردات :

- نلاحظ أن: x تؤول إلى 1 بقيم أكبر و $f(x)$ تؤول إلى 2 . نعبر عن هذا بقولنا أن نهاية f على يمين 1 هي 2 .
نكتب: $\lim_{x\to 1^+}f(x)=2$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=2$.
- نلاحظ أن: x تؤول إلى 1 بقيم أصغر و $f(x)$ تؤول إلى 2 .نعبر عن هذا بقولنا أن نهاية f على يسار 1 هي 2 .
نكتب: $\lim_{x\to 1^-}f(x)=2$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=2$.

B. تعاريف :

1. تعريف 1 :

f دالة عددية معرفة على يمين x_0 . (أي $]x_0,x_0+r[\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ_d عندما x يؤول إلى x_0 على اليمين لنعني أن :

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,0<x-x_0<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell_d|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell_d$ أو أيضا $\lim_{\substack{x\to x\\ x>x_0}}f(x)=\ell_d$.

2. تعريف 2 :

f دالة عددية معرفة على يسار x_0 .(أي $\left]x_0-r,x_0\right[\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ_g عندما يؤول x إلى x_0 على اليسار لنعني أن :

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0, 0<x_0-x<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell_g|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$ أو أيضا $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)=\ell_g$.

3. أمثلة :

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $\begin{cases}f(x)=x & ,x\geq 0\\ f(x)=x^2 & ,x<0\end{cases}$. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to x\\x>0}} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to x\\x<0}} f(x)=0$

4. بعض التعاريف :

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)=+\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists\alpha>0,\ 0<x-x_0<\alpha\Rightarrow f(x)>A$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<0}} f(x)=-\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists\alpha>0, 0<x_0-x<\alpha\Rightarrow f(x)<-A$.

C. خاصيات :

1. خاصيات :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$ (n فردي) ; $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$ (n زوجي حيث $n\in\mathbb{N}^*$)
- كل دالة f لها نهاية ℓ في x_0 يكافئ نهايتها ℓ_d على يمين x_0 تساوي نهايتها ℓ_g على يسار x_0 تساوي ℓ . $(\ell_d=\ell_g=\ell)$
أو أيضا : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_d=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g=\ell$

2. أمثلة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $\begin{cases}f(x)=x^2\sin x & ;x\geq 0\\ f(x)=x+3 & ;x<0\end{cases}$.

1. أ - أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. ب - أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
2. هل الدالة f لها نهاية في 0 ؟

جواب :

1. نحسب :

حسب الأمثلة السابقة لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin x=0$ و منه : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\sin x=0$ (خاصية)

حسب الأمثلة السابقة لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} x+3=3$ و منه : $\lim\limits_{x\to 0^-} x+3=3$ (خاصية).

2. ندرس هل f لها نهاية في 0 :

بمأن $\lim\limits_{x\to0^-} x+3 \neq \lim\limits_{x\to0^+} x^2\sin x$ أي $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

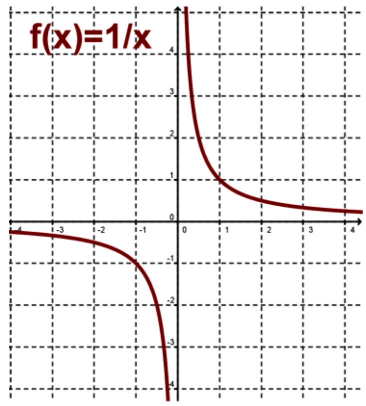
إذن f ليس لها نهاية في 0.

خلاصة : f ليس لها نهاية في 0.

VI. نهاية دالة بجوار $\pm\infty$:

A. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$:

1. نشاط :



الرسم (4) يمثل منحنى الدالة : $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

استنتج مبيانيا ما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=..?..$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=..?..$.

2. مفردات و رموز :

- حسب الرسم (4) نقول عندما x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0 أو أيضا : نهاية f هي 0 عندما x يؤول إلى $+\infty$
  نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
- منحنى (C_f) f يقترب أكثر فأكثر من محور الأفاصيل أو أيضا من المستقيم ذي المعادلة $y=0$ عندما x يؤول إلى $+\infty$.
- لهذا نقول إن (C_f) يقبل مقارب أفقي هو المستقيم الذي معادلته $y=0$.

3. تعريف 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

f دالة معرفة بجوار $+\infty$. (أي $]b,+\infty[\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن: $\forall\varepsilon>0 , \exists B>0 , x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

4. تعريف 2: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

f دالة معرفة بجوار $-\infty$. (أي $]-\infty,b]\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن : $\forall\varepsilon>0 , \exists B>0 , x<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

5. خاصيات تقبل :

أ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$; $(n\in\mathbb{N}^*)$.

ب- f دالة عددية و $\ell\in\mathbb{R}$.

// إذا كانت f تقبل نهاية ℓ فهذه النهاية وحيدة .

// $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-\ell=0$.

6. مثال : بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+x}{x^2}=-3$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x+3x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x}{x^2}+3$. ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x}{x^2}+3=0$.

حسب الخاصية السابقة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x}{x^2}=-3$.

B. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$:

1. نشاط 1:

لنعتبر الدالة العددية : $f(x)=x^2$.

1. أتمم الجدول رقم **1** ثم رقم **2** .
2. أتمم ما يلي :

أ- بالنسبة للجدول رقم 1 :

x يؤول إلى.......... فإن $f(x)$ تؤول إلى..........

عبر عن ذلك باستعمال رمز $\lim\limits_{x\to}$

ب- بالنسبة للجدول رقم 2 :

x يؤول إلى.......... فإن $f(x)$ تؤول إلى.......... . عبر عن ذلك باستعمال رمز $\lim\limits_{x\to}$.

جدول رقم 1					
x	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	$\to$
$f(x)$					

جدول رقم 2					
x	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{15}	$\leftarrow$
$f(x)$					

2. نشاط 2: (النهاية بطريقة مبيانيا).

أ- الرسم (1) يمثل منحنى الدالة : $f(x)=x^3$.

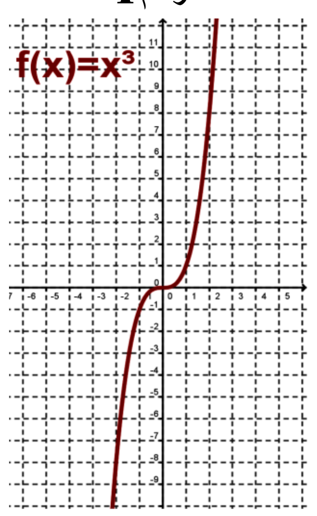
استنتج مبيانيا ما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=....$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=....$.

ب- الرسم (2) يمثل منحنى الدالة : $f(x)=\sqrt{x}$.

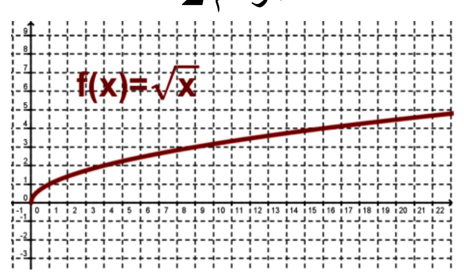
استنتج النهاية التالية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=....$.

هل يمكن أن نتكلم عن نهاية f عند $-\infty$ بالنسبة لرسم 2 ؟

الرسم 1



الرسم 2



3. تعريف 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f دالة معرفة بجوار $+\infty$. (أي $]b,+\infty[\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن: $\forall A>0,\exists B>0, x>B\Rightarrow f(x)>A$

نرمز لذلك ب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

4. تعاريف 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists B>0, x>B\Rightarrow f(x)<-A$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists B>0, x<-B\Rightarrow f(x)>A$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ يكافئ : $\forall A>0,\exists B>0, x<-B\Rightarrow f(x)<-A$.

5. خاصيات (تقبل):

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ .... $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\left(n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}=\mathbb{N}^*\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ (n زوجي). ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ (n فردي)

VII. العمليات على النهايات: (بواسطة جدول مع $x\to ?$ الخاصية صحيحة بتعويض ؟ ب x_0 أو x_0^+ أو x_0^- أو $+\infty$ أو $-\infty$)

f	g	f + g	f × g	1 / g	f / g
$\lim\limits_{x\to ?} f(x)$	$\lim\limits_{x\to ?} g(x)$	$\lim\limits_{x\to ?}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to ?}(f\times g)(x)$	$\lim\limits_{x\to ?}\left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\lim\limits_{x\to ?}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$	$(\ell'\neq 0)$; $1/\ell'$	$(\ell'\neq 0)$; ℓ/ℓ'
$(\ell\neq 0)\ell$	0^+	ℓ	0	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة ℓ
$(\ell\neq 0)\ell$	0^-	ℓ	0	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة ℓ
$(\ell\neq 0)\ell$	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة ℓ	0	0
$(\ell\neq 0)\ell$	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة ℓ	0	0
0	0	0	0	$\pm\infty$ إذا كان $0^\pm$.	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0	0
$+\infty$	$\ell'\neq 0$; ℓ'	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة ℓ'	$(\ell'\neq 0)$; $\frac{1}{\ell'}$	∞ مع وضع إشارة ℓ'
$-\infty$	$\ell'\neq 0$; ℓ'	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة ℓ'	$(\ell'\neq 0)$; $\frac{1}{\ell'}$	∞ مع وضع عكس إشارة ℓ'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد

الأشكال الغير المحددة هي: نوع 1 : $(+\infty)+(-\infty)$; $(-\infty)+(+\infty)$; $0\times(\pm\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{0}{0}$. نوع 2 : 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0

VIII. نهاية الدوال: 1- الحدودية 2 – الجذرية 3 – من نوع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ 4 - نهاية دالة مثلثة :

A. نهاية دالة حدودية - نهاية دالة جذرية :

1. خاصية :

$P(x)=\sum\limits_{i=0}^{i=n}a_ix^i=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ و $Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{i=m}b_ix^i=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$ دالتان حدوديتان

- لدينا : 1) $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$. 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_nx^n$.
- لدينا : 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ مع $Q(x_0)\neq 0$. 4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

2. أمثلة :

أ- مثال خاص بالدوال الحدودية :

1. $\lim\limits_{x\to1} 2x+6=2\times3+6=12$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{3}\times1^2=\frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{3}x^2+2x+6=\frac{1}{3}\times1^2+2\times\frac{1}{3}+6=7$.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x+6=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{5}x^3+2x+6=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{5}x^3=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}18x^4-3x^3+2x-5=\lim\limits_{x\to+\infty}18x^4=+\infty$.

ب- مثال خاص بالدوال الجذرية :

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+6}{-3x+2}=\frac{2\times3+6}{-3\times1+2}=\frac{12}{-1}=-12$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{18x^4-3x^3+2x-5}{3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{18x^4}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-18x^3=-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{18x^4-3x^3+2x-5}{3-x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{18x^4}{-x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}-18=-18$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{18x^4-3x^3+2x-5}{3-x^7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{18x^4}{-x^7}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{18}{x^3}=0$.

B. نهاية دالة من نوع $g(x)=\sqrt{f(x)}$:

1. خاصية :

f دالة عددية معرفة و موجبة على D_f و $\ell\geq0$.

- إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$ (أو $x\to x_0$ أو $x\to x_0^{\pm}$) و $\ell\geq0$ فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$ (أو $x\to x_0$ أو $x\to x_0^{\pm}$).
- إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ (أو $x\to x_0$ أو $x\to x_0^{\pm}$) فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$ (أو $x\to x_0$ أو $x\to x_0^{\pm}$).

2. مثال:

1. $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x^2+3}=\sqrt{1^2+3}=2$. $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(-3)^2-1}=\sqrt{8}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x-4}{3x+6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{3x+6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

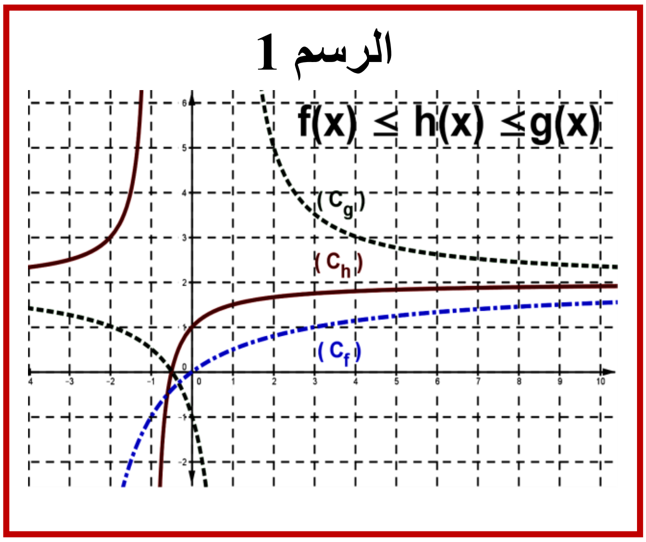
C. نهايات الدوال المثلثية :

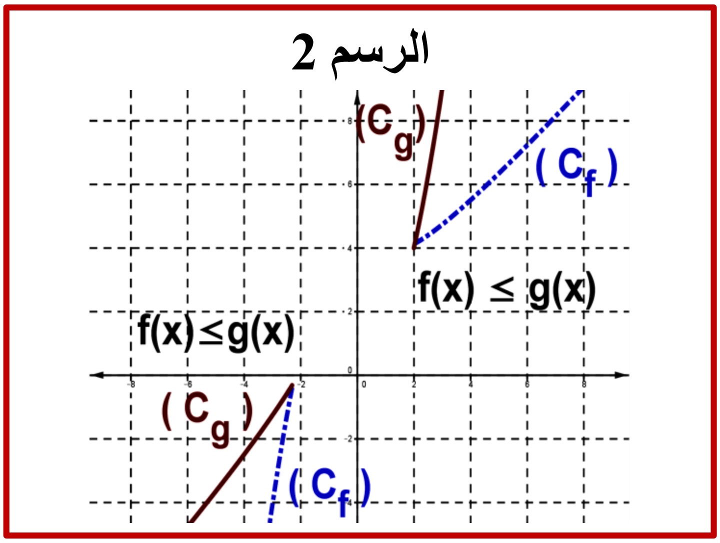
1. خاصيات :

- $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\tan x=0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\tan x=\tan x_0$ ($x_0\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$)
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{x}=a$ مع $a\in\mathbb{R}^*$.

IX. النهايات والترتيب :

1. نشاط :





لدينا :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. استنتج مبيانيا $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ (الرسم 1)

2) نعلم : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. استنتج مبيانيا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (الرسم 2)

3) نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. استنتج مبيانيا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ (الرسم 2)

2. خاصيات :

f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to?} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to?} g(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to?} g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to?} f(x)=-\infty$.
- إذا كان $f(x)\le h(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to?} f(x)=\lim\limits_{x\to?} g(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to?} h(x)=\ell$.