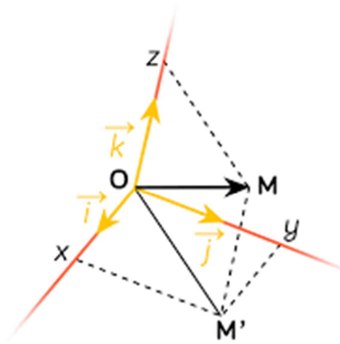
تحليلية الفضاء

إحداثيتي نقطة بالنسبة لمعلم-إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء .
نقول إن المثلوث $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس للفضاء و أن المربوع $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء



ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما في الفضاء و لتكن M نقطة من الفضاء

- **لدينا :** $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

المثلوث $\left(x,y,z\right)$ يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و نكتب $M\left(x,y,z\right)$

x **يسمى أفصول النقطة** M
y **يسمى أرتوب النقطة** M
z **يسمى أنسوب النقطة** M

- **لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء توجد ثلاثة أعداد x و y و z حيث** $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى أساس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$

- $\left.\begin{matrix} x=x' \\ y=y' \\ z=z' \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$
- مجموع المتجعتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المتجهة : $\vec{u}+\vec{v}\left(x+x',y+y',z+z'\right)$
- ضرب عدد في متجهة : $\alpha\vec{u}\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)$

لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و لتكن I منتصف القطعة $\left[AB\right]$ ، لدينا :

- إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$
- إحداثيات I منتصف القطعة $\left[AB\right]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

شرط استقامية متجهتين

لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ متجهتين من الفضاء.

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\neq 0$

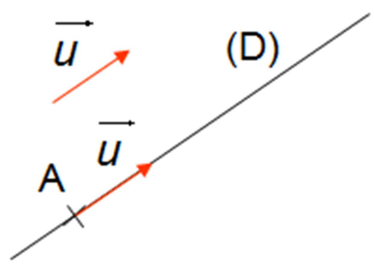
المتجهات المستوائية

لتكن $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{w}(x'',y'',z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء.

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية $\Leftrightarrow$ $d\acute{e}t(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية $\Leftrightarrow$ $d\acute{e}t(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$

حيث :
$$d\acute{e}t(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

تمثيل بارامتري لمستقيم



الفضاء منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ متجهة غير منعدمة .

$$(t\in\mathbb{R})\quad \overrightarrow{AM}=t\vec{u}\Leftrightarrow M\in(D)$$

النظمة : $(t\in\mathbb{R})\quad \begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \\ z=z_A+t\gamma \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_A,y_A,z_A)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

إذا كان (D) مستقيما مارا من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ متجهة موجهة له فإن النظمة :

$\frac{x-x_A}{\alpha}=\frac{y-y_A}{\beta}=\frac{z-z_A}{\gamma}$ تسمى نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) (مع $\alpha\neq 0$ و $\beta\neq 0$ و $\gamma\neq 0$)

تمثيل بارامتري لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha',\beta',\gamma'\right)$ متجهتين غير منعدمتين

$$M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{u}' \quad \left((t,t')\in\mathbb{R}^2\right)$$

النظمة : $\left((t,t')\in\mathbb{R}^2\right)$ $\begin{cases} x=x_A+t\alpha+t'\alpha' \\ y=y_A+t\beta+t'\beta' \\ z=z_A+t\gamma+t'\gamma' \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من

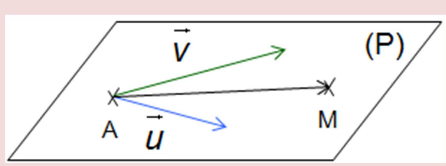
$A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha',\beta',\gamma'\right)$

معادلة ديكارتية لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

ليكن (P) لمستوى المار من النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ و $\vec{v}\left(\alpha',\beta',\gamma'\right)$

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow d\acute{e}t\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0$$



معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $ax+by+cz+d=0$ ($(a,b,c)\neq(0,0,0)$)

الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن $(D)=D(A,\vec{u})$ و $(\Delta)=D(B,\vec{v})$ مستقيمين في الفضاء

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\in(\Delta)$ أو $B\in(D)$ فإن $(D)=(\Delta)$
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\notin(\Delta)$ فإن (D) و (Δ) متوازيان قطعا
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $dét\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=0$ فإن (D) و (Δ) متقاطعان
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $dét\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)\neq 0$ فإن (D) و (Δ) غير مستوائيين

الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن $(P)=P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $(Q)=P(B,\vec{u}',\vec{v}')$ مستويين في الفضاء

- (P) و (Q) متوازيين إذا وفقط إذا كانت $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{u}')=0$ و $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{v}')=0$
  أي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ مستوائية
- (P) و (Q) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{u}')\neq 0$ و $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{v}')\neq 0$
  أي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ غير مستوائية

$(P): ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$
و $(Q): a'x+b'y+c'z+d'=0$ حيث $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

- (P) و (Q) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$
- (P) و (Q) متوازيان قطعا إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث :
  $a'=\lambda a$ و $b'=\lambda b$ و $c'=\lambda c$ و $d'\neq\lambda d$
- (P) و (Q) منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث :
  $a'=\lambda a$ و $b'=\lambda b$ و $c'=\lambda c$ و $d'=\lambda d$

الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

ليكن $(P)=P(A,\vec{u},\vec{v})$ مستوى في الفضاء و $(D)=D(B,\vec{w})$ مستقيم في الفضاء

- (D) و (P) متوازيان إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية أي $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$
- (D) و (P) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية أي $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

❖ لتكن $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

المسافة AB : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

❖ لتكن $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$

منظم متجهة : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

خاصية : $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

❖ <u>تمثيل بارامتري لمستقيم:</u>

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

$M(x,y,z)\in(D)\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}\quad (t\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \\ z=z_A+t\gamma \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

❖ <u>معادلة ديكارتية لمستوى:</u>

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية للمستوى (P)

$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$

<u>**خاصية :**</u>

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ فإن $\vec{n}(a,b,c)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P).

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega,(P))=\frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعا
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M=r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r و نرمز لها بالرمز : $S(\Omega,r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها r هي :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ج . معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من ألفضاء

$$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

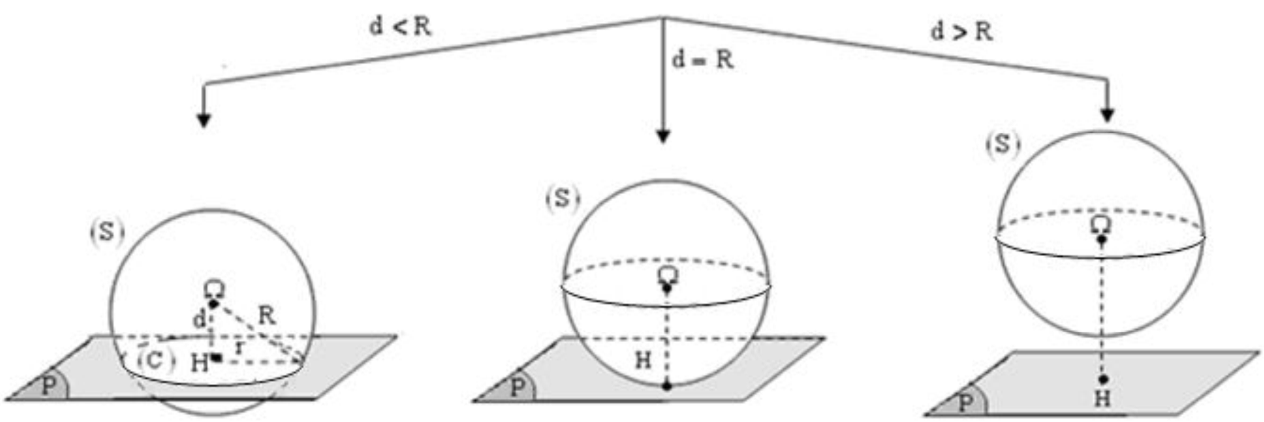
$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

هناك ثلاث حالات :

- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}<0$: E مجموعة فارغة
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}=0$: E هي النقطة الأحادية $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}>0$: E هي الفلكة التي مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ وشعاعها $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d=d(\Omega,(P))$
لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

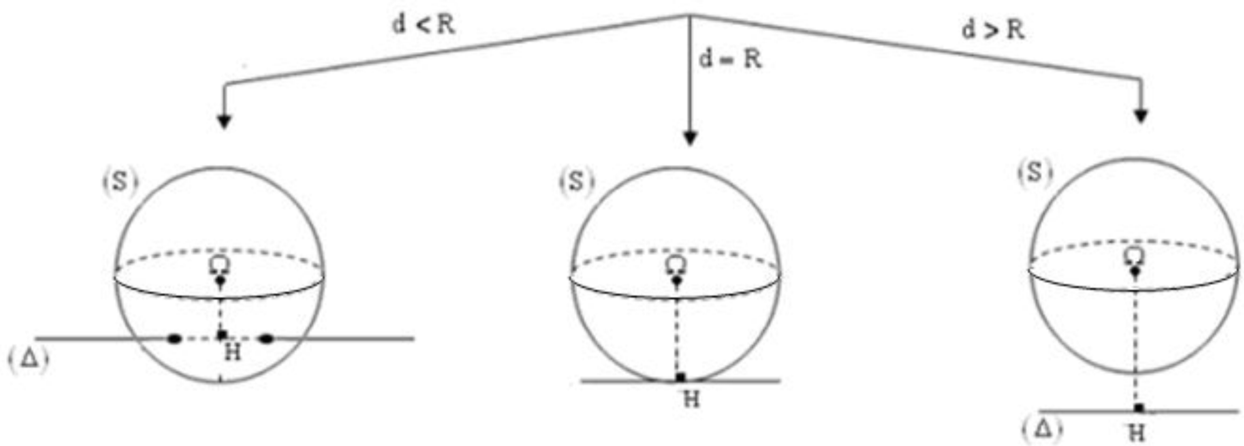


المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)	المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H	المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$

الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega,(\Delta))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



المستقيم (Δ) و الفلكة (S) لا يتقاطعان		المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H		المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين

الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

فإن $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

ب. استقامية متجهتين :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ يكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ج. استقامية ثلاث نقط :

A و B و C مستقيمية يكافئ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ **فإن النقط** A **و** B **و** C **غير مستقيمية وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى** (ABC)

و المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ **هي متجهة منظمية للمستوى** (ABC)

و لدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

ه. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

مساحة مثلث ABC **هي :** $S_{ABC} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2}$

مساحة متوازي الأضلاع هي : $S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

مسافة نقطة Ω **عن مستقيم** (D) **مار من نقطة** A **و موجه بمتجهة** $\vec{u}$ **هي :** $d\left(\Omega,(D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax+by+cz+d=0$ **و** $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\vec{n}(a,b,c)$ **و** $\vec{n}'(a',b',c')$ **هما متجهتان منظميتان للمستويان** (P) **و** (P')

$(P)//(P')$ **يكافئ** $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

$(P) \perp (P')$ **يكافئ** $\vec{n}.\vec{n}' = \vec{0}$

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) **و** (P') **متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة** $\vec{n} \wedge \vec{n}'$