السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 : حدد حقيقة العبارات التالية :

1) $\forall x \in IR \quad x^2 \geq x$

بأخذ : $x = \frac{1}{2}$ سنجد أن $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$ ما يعني خطأ العبارة

2) $\exists n \in IN \quad 2n + 5 = 20$

العبارة المقترحة تكافئ : $\exists n \in IN \quad n = \frac{15}{2} = 7{,}5$ مما يبين خطأ العبارة

3) $\forall x \in IR\ \forall y \in IR \quad |x+y| = |x| + |y|$

بأخذ $x = 7$ و $y = -7$ سنجد أن : $0 = 7 + 7$ وهذا غير صحيح، إذن هذه العبارة غير صحيحة.

4) $\exists x \in IR \quad x^2 - x + 1 = 0$

بحساب المحددة $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ نستنتج أن المعادلة $x^2 - x + 1 = 0$ لا حل لها في IR مما يعني عدم صحة العبارة.

5) $\forall x \in IR \quad x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$

بأخذ $x = -3$ سنجد أن $x^2 = 9 > 1$ لكن مع ذلك $x \leq 1$ مما يعني أيضا عدم صحة هذه العبارة.

6) $\exists n \in IN \quad n^2 = 7$

بما أن : $4 < 7 < 9$ (أي أن 7 محصور بين مربعين كاملين متتابعين) فلا يمكن أن يكون مربعا كاملا إذن العبارة غير صحيحة

7) $\forall n \in IN \quad \sqrt{9n^2 + 6n + 1} \in IN$

بما أن : $\forall n \in IN \quad \sqrt{9n^2 + 6n + 1} = \sqrt{(3n+1)^2} = |3n+1| = 3n + 1 \in IN$ فهذه العبارة صحيحة

8) $\forall m \in IR \quad \exists x \in IR \quad x^2 + mx + m - 1 = 0$

محددة الحدودية $x^2 + mx + m - 1 = 0$ (باعتبار x المجهول و m بارامتر)

هي : $\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$ ، مما يعني أنه مهما تكن قيمة البارامتر m فهذه المعادلة لها على الأقل حل في IR، مما يؤكد صحة العبارة.

البرهان على صحة عبارة من عدمه أمر غير يسير، إذ يتطلب أحيانا لإيجاد الأمثلة المضادة المناسبة لنفي صحة العبارة أو استعمال قواعد سابقة للبرهان على صحتها، الأمر يتطلب الاطلاع و إنجاز تمارين متنوعة.

تمرين 2 :

1) بين أن : $\forall x \in IR\ \exists y \in IR \quad x^2 + xy - y^2 = 0$

محددة الحدودية $x^2 + xy - y^2 = 0$ (باعتبار x المجهول و y بارامتر) هي : $\Delta = y^2 + 4y^2 = 5y^2 \geq 0$

مما يعني أنه مهما تكن قيمة العدد y فهذه المعادلة لها على الأقل حل في IR، وهذا ينهي البرهان.

2) بين أن : $\forall y \in IR \quad \left(y + y^3 \geq 2 \Rightarrow y \geq 1\right)$

لدينا : $\forall y \in IR \quad y < 1 \Rightarrow \begin{cases} y^3 < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow y + y^3 < 2$ بالتالي : $\forall y \in IR \quad \left(y + y^3 \geq 2 \Rightarrow y \geq 1\right)$

هنا لم نقم بنفي العبارة ، بل استعملنا الاستلزام المضاد للعكس، و الذي هو عبارة تكافئ العبارة الأصلية

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

3) بين أن : $\forall(n,m)\in(IN^*)^2 \quad (2n+1)^{2014}\neq(2m+2)^{2015}$

بما أن $(2n+1)^{2014}$ عدد فردي (لأنه عبارة عن قوة أساسها فردي) و $(2m+2)^{2015}$ عدد زوجي (الأساس زوجي) فالعبارة المقترحة صحيحة.

4) بين أن : $\forall x\in IR \quad |\sin(x)\cos(x)|\leq\frac{1}{2}$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-|\sin(x)\cos(x)| &= \frac{1}{2}(1-2|\sin(x)\cos(x)|)=\frac{1}{2}(\sin^2(x)+\cos^2(x)-2|\sin(x)\cos(x)|)\\ &=\frac{1}{2}(|\sin(x)|-|\cos(x)|)^2\geq 0\end{aligned}$$

إذن : $\forall x\in IR \quad |\sin(x)\cos(x)|\leq\frac{1}{2}$

5) بين أن : $\forall(x,y)\in IR \quad \left(|x|<1\ et\ |y|<1 \Rightarrow \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1\right)$

لدينا من جهة :
$$1-\frac{x-y}{1-xy}=\frac{1-xy-x+y}{1-xy}=\frac{1-x-xy+y}{1-xy}=\frac{1-x+y(1-x)}{1-xy}=\frac{(1-x)(1+y)}{1-xy}$$

و من جهة أخرى :
$$-1-\frac{x-y}{1-xy}=\frac{-1+xy-x+y}{1-xy}=\frac{-1-x+xy+y}{1-xy}=\frac{-(1+x)+y(1+x)}{1-xy}=\frac{(1+x)(y-1)}{1-xy}$$

و بما أن :
$$\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<x<1\\-1<y<1\\|xy|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1+y>0\\y-1<0\\-1<xy<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1+y>0\\y-1<0\\-1<-xy<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1+y>0\\y-1<0\\0<1-xy\end{cases}$$

فإن :
$$\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-\dfrac{x-y}{1-xy}>0\\-1-\dfrac{x-y}{1-xy}<0\end{cases}\Rightarrow -1<\frac{x-y}{1-xy}<1\Rightarrow\left|1-\frac{x-y}{1-xy}\right|<1$$

محاولة التأطير فقط في هذا التمرين لن تجدي نفعا، مما يعلمنا أهمية قاعدة المقارنة الأساسية (تحديد إشارة الفرق)

6) حدد نفي جميع العبارات السابقة

نفي العبارة 1 : $\exists x\in IR \quad x^2<x$

نفي العبارة 2 : $\exists y\in IR \quad (y+y^3\geq 2$ و $y<1)$

نفي العبارة 3 : $\exists(n,m)\in(IN^*)^2 \quad (2n+1)^{2014}=(2m+2)^{2015}$

نفي العبارة 4 : $\exists x\in IR \quad |\sin(x)\cos(x)|>\frac{1}{2}$

نفي العبارة 5 : $\exists(x,y)\in IR \quad \left(|x|<1\ et\ |y|<1\right.$ و $\left.\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\geq 1\right)$

تمرين 3 : p و q عبارتان.

1) لدينا :

$$((p \text{ و } q) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg(p \text{ et } q) \text{ ou } p) \Leftrightarrow ((\neg p \text{ ou } \neg q) \text{ ou } p) \Leftrightarrow (\neg p \text{ ou } \neg q \text{ ou } p) \Leftrightarrow (\neg q \text{ ou } (\neg p \text{ ou } p))$$

و بما أن العبارة $(\neg p \text{ ou } p)$ دائما صحيحة فإن العبارة $(\neg q \text{ ou } (\neg p \text{ ou } p))$ دائما صحيحة

بالتالي العبارة $(p \text{ و } q) \Rightarrow p$ دائما صحيحة، إذن فهي قانون منطقي

2) لدينا : $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\neg p \text{ ou } (p \text{ ou } q)) \Leftrightarrow ((\neg p \text{ ou } p) \text{ ou } q)$

و بما أن العبارة $(\neg p \text{ ou } p)$ دائما صحيحة فإن العبارة $((\neg p \text{ ou } p) \text{ ou } q)$ دائما صحيحة

بالتالي العبارة $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$ دائما صحيحة، إذن فهي قانون منطقي

3) لدينا : $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(p \text{ et } q)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \text{ ou } \neg q) \text{ ou } \neg(p \text{ et } q)) \Leftrightarrow ((p \text{ et } q) \text{ ou } \neg(p \text{ et } q))$

و بما أن العبارة $((p \text{ et } q) \text{ ou } \neg(p \text{ et } q))$ دائما صحيحة فإن العبارة $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(p \text{ et } q))$ دائما صحيحة

إذن فهي قانون منطقي

- القانون المنطقي هو عبارة تكون دائما صحيحة مهما كانت حقيقة العبارات التي تتضمنها.
- يمكن استعمال جدول الحقيقة للبرهان على هذه القوانين المنطقية، لكن يفضل استعمال قوانين منطقية معروفة عوضا عن ذلك ربحا لوقت، مثل : $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \text{ ou } b)$

تمرين 4 :

1) لنبين أن $\sqrt{2} \notin Q$ ، سنستعمل برهانا بالخلف، نفترض أن : $\sqrt{2} \in Q$ إذن يوجد $a \in IN$ و $b \in IN^*$ حيث a و b أوليان فيما بينهما و $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

منه: $\sqrt{2}\, b = a$ منه : $2\, b^2 = a^2$ إذن : a^2 عدد زوجي إذن a عدد زوجي منه: $a = 2k \ / k \in IN$

منه: $2\, b^2 = 4k^2$ منه : $b^2 = 2k^2$ منه b^2 عدد زوجي إذن b عدد زوجي

إذن a و b عددان زوجيان، و هذا يناقض كونهما أوليين فيما بينهما. بالتالي: $\boxed{\sqrt{2} \notin Q}$

- هذا السؤال يعتبر معلومة أساسية يستحسن الالمام ببرهانها.

2) استنتج أن $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q$

نضع : $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ نفترض أن : $x \in Q$

إذن: $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in Q$ منه: $x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{2} \in Q$ منه: $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \in Q$

و هذا غير ممكن حسب السؤال الأول. بالتالي: $\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q}$

- تذكر أن مجموع و فرق و جذاء و خارج عددين جذريين هو عدد جذري (طبعا المقام يجب أن يكون غير منعدم في حالة الخارج)

تمرين 5 :

نفترض أن جميع المعادلات :
$$\begin{array}{ll} (H) & x^2-2ax+bc=0 \\ (J) & x^2-2bx+ac=0 \\ (G) & x^2-2cx+ab=0 \end{array}$$
لا تقبل أي حل حقيقي، إذن فمحدداتها جميعا سالبة

إذن: $\begin{cases} 4a^2-4bc<0 \\ 4b^2-4ac<0 \\ 4c^2-4ab<0 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} a^2<bc \\ b^2<ac \\ c^2<ab \end{cases}$ ، بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد : $a^2b^2c^2<a^2b^2c^2$

و هذا غير ممكن، بالتالي افتراضنا غير صحيح و هذا يتبث أن إحدى المعادلات تقبل على الأقل حلا حقيقيا

في التمرين السابق وجدنا تناقضا أما الآن فوجنا متفاوتة غير ممكنة، و يجب أن نعي الفرق بين التناقض و الاستحالة:
الاستحالة هي عبارة غير ممكنة مهما كان افتراضنا مثل أن نجد: $2015=2014$ ، لكن التناقض أن نجد عبارة قد تكون صحيحة لكنها عكس عبارة توجد بالافتراض مثل أن نفترض أن $a>0$ ثم نجد أن $a\leq 0$