

تمارين المنطق

التمرين الأول :

حدد نفي و قيمة الحقيقة لكل من العبارات التالية :

$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^+) \frac{1+\sqrt{x}}{2} \leq m$	$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x + y > xy$	$(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$
$(\forall x \notin \mathbb{Q}) x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$(\exists x \notin \mathbb{Q})(\exists y \notin \mathbb{Q}) xy \in \mathbb{Q}$	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) a^2 + b^2 = 1$

التمرين الثاني :

أتمم النصوص التالية للحصول على عبارات صحيحة كـ

$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$  ،  $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{1}{x} < x \Leftrightarrow \dots\dots\dots$  ،  $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \leq x \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

التمرين الثالث :

باستعمال البرهان بالمضاد للعكس بيه ما يلي :

(1)  $(\forall (a, b) \in [2, +\infty[^2) a \neq b \Rightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

(2) ليكن  $a, b \in \mathbb{R}$  بحيث  $a+b \neq 0$  . بيه أنه  $\frac{a-b}{a+b} \neq 3$   $\Rightarrow a \neq -2b$

(3) بيه أنه لكل عددين  $x, y \in \mathbb{R}$  لدينا :  $(xy \neq 1 \text{ و } y \neq x) \Rightarrow \left( \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1} \right)$

(4) أ- حدد نفي العبارة : "  $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y - xy = 0$  "

ب- بيه أنه العبارة  $P$  خاطئة

التمرين الرابع :

(1) حل المتراجحة التالية : (1)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$  (2)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{11-x} \geq 2$

(2) أ- حدد نفي العبارة  $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : [a \neq b \Rightarrow a^2 \neq b^2]$

ب- ما هي قيمة حقيقة العبارة ؟

(3) حل ما يلي :  $E\left(\frac{3}{x+1}\right) = 2$  ،  $E\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) = \frac{x}{2}$  ،  $3E(2x - 1) = 2$

التمرين الخامس :

بيه بالتدرج ما يلي : (1)  $9/16^n + 12n - 1$  (2)  $8/1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n$  (3)  $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

(4) بيه بالتدرج أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)$

(5)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$  (6)  $\sum_{k=1}^{k=n} k(n+k) = \frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) (2 \times 3^2) + (2^2 \times 3^3) + \dots + (2^{n-1} \times 3^n) = \frac{18}{5} (6^{n-1} - 1) \quad (6)$$

التمرين السادس :

$$(1) \text{ بيه أنه } (\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$$

$$(2) \text{ بيه أنه } (\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x \neq y \Rightarrow (x-1)\sqrt{x+1} \neq (y-1)\sqrt{y+1}$$

التمرين السابع :

$$\text{للكه } h \text{ دالة معرفة مه } \mathbb{N} \text{ نحو } \mathbb{N} \text{ و بحيث : } h(0) = 3 \text{ و } h(n+1) = 2h(n) + 5$$

$$(1) \text{ أ- حدد } h(1) \text{ و } h(2)$$

$$\text{ب- بيه أنه } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) > 0 \text{ و استنتج أنه } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n+1) - h(n) > 0$$

$$(2) \text{ بيه بالترجع أنه : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) = 2^{n+3} - 5$$

التمرين الثامن :

$$(1) \text{ بيه أنه } (\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \left( \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2} \right) \Rightarrow (x=1 \text{ أو } y=2 \text{ أو } z=3)$$

$$(2) \text{ بيه أنه } (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}) \quad \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$$

$$(3) \text{ للكه } a, b \text{ عدديه حقيقيه و } c \text{ مه } \mathbb{R}^{+*} \text{ بحيث } |a+b| \leq c \text{ و } |a-b| \leq c \text{ بيه أنه } |a| + |b| \leq c \text{ و } |ab| \leq \frac{c}{4}$$

$$(4) \text{ ليكه } n \text{ مه } \mathbb{N}^* \text{ . نضع } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (n-k)^2$$

$$\text{أحسب } S_3 \text{ ثم بيه بالترجع أنه } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

التمرين التاسع :

$$p_n \text{ " } (\forall n \geq 2) \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \text{ نعتبر العبارة :}$$

$$(1) \text{ بيه أنه } p_n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$$

$$(2) \text{ قاره } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \text{ و } \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$(3) \text{ أ- بيه أنه } (\forall n \geq 2)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad (1+x)^n > 1+nx$$

ب- استنتج أنه العبارة  $p_n$  صحيحة

التمرين العاشر :

$$\text{للكه } h \text{ دالة معرفة مه } \mathbb{N} \text{ نحو } \mathbb{N} \text{ و بحيث : } h(0) = 3 \text{ و } h(n+1) = 2h(n) + 5$$

$$\text{أحسب } h(1) \text{ و } h(2) \text{ و بيه بالترجع أنه : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) = 2^{n+3} - 5$$