التمرين رقم 1

حدد نفي و قيمة الحقيقة لكل من العبارات التالية :

1) $(\exists x\in\mathbb{R})\quad x^2<x$
2) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad n^2\geq n$
3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad x>\dfrac{1}{x}$
4) $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\exists y\in\mathbb{R})\quad x+y-2=0$
5) $(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})\quad x+y-2=0$
6) $(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})\quad xy+2y+x+2=0$
7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sqrt{n(n+1)+1}\in\mathbb{N}$

التمرين رقم 2

باستعمال برهان بالمضاد للعكس بين ما يلي :

1) $(\forall x>1)(\forall y>1):\ \left(x\neq y\Rightarrow x^2-2x\neq y^2-2y\right)$
2) x , y , z ثلاثة أعداد حقيقية : بين أن $\left(x+y>2z\right)\Rightarrow\left(x>z\right.$ أو $\left.y>z\right)$
3) ليكن a , b عددان حقيقيان بحيث $b\neq 2a$ بين أن : $b\neq\dfrac{1}{4}a\Rightarrow\dfrac{a+2b}{2a-b}\neq\dfrac{6}{7}$
4) $\left[(\forall x\in\mathbb{R}):(a<x\Rightarrow b<x)\right]\Rightarrow(b\leq a)$
5) بين أن لكل عددين x , y من $\mathbb{R}$ لدينا : $\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right.$ و $\left.y\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

التمرين رقم 3

باستعمال بهان بالخلف بين ما يلي :

1) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \dfrac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$
2) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \sqrt{n^2+7n+12}\notin\mathbb{N}$
3) ليكن n عددا فرديا و x_1 , x_2 , ... , x_n عناصر مختلفة من $E=\{1,2,......,n\}$

بين أن : $(\exists k\in E)$ (x_k-k عدد زوجي)

4) لتكن a , b , c أعداد حقيقية من $\mathbb{R}^{+*}$ و بحيث : $abc>1$ و $a+b+c<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

أ- بين أن $a\neq 1$ و $b\neq 1$ و $c\neq 1$

ب- بين أن $a<1$ أو $b<1$ أو $c<1$

التمرين رقم 4

باستعمال برهان بفصل الحالات بين ما يلي :

1) أ- إذا كان n لا يقبل القسمة على 3 فإن العدد n^2-1 يقبل القسمة على 3

ب- استنتج أن العدد $ab\left(a^2-b^2\right)$ يقبل القسمة على 3 لكل عددين b , a من $\mathbb{N}$

2) $E\left(\dfrac{x}{2}\right)+E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=E(x)$
3) $E(x)+E\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=E(2x)$

التمرين رقم 5

بين بالترجع ما يلي :

1) 9 يقسم 4^n+6n-1
2) $4n^3-n$ يقبل القسمة على 3
3) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 7/3^{2n+3}+2^{n+3}$
4) $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 11/9^{n+1}+2^{6n+1}$
5) $(\forall n\geq 1)\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)\quad (1+x)^n\geq 1+nx$
6) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$
7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$
8) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n}k\,2^k=2+(n-1)2^{n+1}$

9) $\displaystyle \sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $(\forall a \neq 1)(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 10) $\displaystyle \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p^2}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

11) $\displaystyle \sum_{k=1}^{k=n} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 12) $\displaystyle (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$

التمرين رقم 6

ليكن a , b عددان من المجال $[0,1]$. نضع $A = ab$ ، $B = a(1-b) + b(1-a)$ و $C = (1-a)(1-b)$

1) بين أن $B \geq 2\left(\sqrt{ab} - ab\right)$

2) نفترض أن $A < \frac{4}{9}$ و $B < \frac{4}{9}$ و $C < \frac{4}{9}$

أ- بين أن $ab - \sqrt{ab} + \frac{2}{9} > 0$ و استنتج أن $ab < \frac{1}{9}$

ب- بين أن : $C < \frac{4}{9} \Rightarrow a + b - ab > \frac{5}{9}$

ج- استنتج أن $B \geq \frac{4}{9}$. الخلاصة

التمرين رقم 7

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 نضع $\displaystyle P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

1) بين ان : $\displaystyle P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$ $(\forall n \geq 2)$

2) أ- تحقق أن : $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$

ب- استنتج أن : $P_n = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ $(\forall n \geq 2)$

التمرين رقم 8

ليكن a من المجال $]0,1[$. 1) بين أن : $p \leq q \Rightarrow a^p \geq a^q$ $(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2)$

2) أ-بين أن : $a + a^2 + \dots\dots + a^n = a\dfrac{1-a^n}{1-a}$

ب- استنتج أن : $1 - a^n \geq n(1-a)a^{n-1}$

3) خذ $a = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ ثم بين أن $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq 1$

التمرين رقم 9

1) $\left(n+1 \text{ مجموع مربعين كاملين}\right) \Rightarrow \left(2n+1 \text{ مربع كامل}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أ- بين ان : $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2})$

ب- استنتج أن لكل أعداد حقيقية موجبة قطعا a , b , c لدينا : $\dfrac{a+b}{c^2} + \dfrac{b+c}{a^2} + \dfrac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

3) بين أن العبارة : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dots.. + \dfrac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$ $(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2})$ خاطئة

4) نضع $A_n = \underbrace{777.....7}_{n\, fois}$ بين أن $A_n = \dfrac{7}{9}\left(10^n - 1\right)$

5) أ- بين أن : $\left(\dfrac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ب- بين أن $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$