تمارين : مبادئ في المنطق

.01

1. حدد قيمة حقيقة العبارات التالية : $p\wedge(p\vee q)$ مع p صحيحة .
2. f دالة من مجال I ضمن $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. عبر باستعمال جمل عن ما يلي : $\forall(x,y)\in I^2, x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$.
3. f دالة من مجال I ضمن $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. عبر باستعمال المكممات ما يلي : f تنعدم مرة واحدة فقط على I .
4. أعط نفي العبارات التالية : $x\neq y$ و $\exists(x,y)\in I^2, f(x)=f(y)$ (أكتب النفي بثلاثة طرائق مختلفة) .
5. هل العبارة التالية : $(\urcorner p\Rightarrow q)\Rightarrow p$ قانون منطقي حيث p و q عبارتين .

.02

نعتبر العبارة P التالية : " $\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}(x+y+1)\right)\Rightarrow(x=1$ و $y=2)$ "

1. أكتب P بدون استعمال الرابط المنطقي $\Rightarrow$ و كذلك عدم استعمال التعبير " إذا كان ...... فإن........ "
2. أكتب نفي P.
3. أكتب P باستعمال الاستلزام المضاد للعكس.
4. حدد قيمة حقيقة العبارة P .

.03

1. باستعمال الاستدلال بالمثال المضاد بين أن العلاقة التالية خاطئة " $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}: xy=2$ " .
2. لكل n من $\mathbb{N}^*$ بين باستعمال الاستدلال بالتكافؤات المتتالية أن : $S_n=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow S_n=1+2+\cdots+n$ (عدم استعمال الترجع)
3. باستعمال الاستلزام المضاد للعكس : بين : إذا كان a^2 ليس بعدد صحيح مضاعف ل 16 فإن $\frac{a}{2}$ ليس بعدد صحيح زوجي .
4. a و b عددان معلومين من $\mathbb{R}^*$ ؛ لنعتبر المعادلة (E) بمجهول حقيقي : $(E): \frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$.
   - أ- حدد D مجموعة تعريف المعادلة (E) حسب قيم a و b.
   - ب- حل المعادلة (E) باستعمال الاستدلال بفصل الحالات .

.04

1. بين أن : لكل n من $\mathbb{N}$ أن العدد $3.5^{2n+1}+2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.
2. f دالة عددية من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ حيث : $\forall x\in\mathbb{R}: f(2x)=f(x)$.
   - أ- ليكن x من $\mathbb{R}$ بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: f(x)=f(2^{-n}x)$.
   - ب- استنتج : $\forall p\in\mathbb{Z}: f(x)=f(2^p x)$ (مع x من $\mathbb{R}$)
3. n عدد صحيح طبيعي . نضع $1\times2\times3\times\cdots\times n=n!$ مع $1!=1$ و $0!=1$.
   - أ- نضع : $u_k=k!$ مع k من $\mathbb{N}^*$. بين أن : $u_{k+1}-u_k=k(k!)$.
   - ب- أكتب المجموع التالي : $S_n=1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+n.n!$ باستعمال u_k .
   - ج- استنتج قيمة المجموع S_n .
   - د- أكتب المجموع S_n مستعملا الرمز $\sum$ ثم أحسب المجموع S_n مستعملا فقط الرمز $\sum$.