بسم الله الرحمن الرحيم

La logique المنطق

محتوى البرنامج : * العبارات ؛ العمليات على العبارات ؛ الدوال العبارية ؛ المكممات . * الاستدلالات الرياضية : الاستدلال بالخلف ؛ الاستدلال بمضاد العكس ؛ الاستدلال بفصل الحالات ؛ الاستدلال بالتكافؤ ؛ الاستدلال بالترجع .
القدرات المنتظرة : * التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة . * التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا .
توجيهات تربوية : * ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها . * ينبغي تجنب البناء النظري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة . * إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هدا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه ، كلما سنحت الفرصة بذلك ، بمختلف فصول المقرر اللاحقة .
الغلاف الزمني لإنجاز الدرس : 8 ساعات

I ـ العبارات ـ العمليات على العبارات :

1) العبارات :

نشاط تمهيدي :

نشاط 1 ص 14 من الكتاب المدرسي (في رحاب الرياضيات السنة الأولى).

1) انقل الجدول التالي في دفترك ثم ضع العلامة " X " في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل عدد زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2}$ عدد لا جدري		
الإزاحة تحافظ على المسافات		
الدالة $x \mapsto x^2$ حيث $x \in IR$ دالة زوجية		
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		

2) هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

الجمل الرياضية الواردة في الجدول هي نصوص رياضية سليمة لغويا وتحمل معنى ، قد يكون إما صحيحا وإما خاطئا ، تسمى عبارات رياضية .

إذا كانت عبارة صحيحة نقول إن قيمة حقيقتها صحيحة وإذا كانت خاطئة نقول إن قيمة حقيقتها خاطئة .

تعريف :

العبارة في المنطق هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا وإما خاطئا (ولا يمكن أن يكون صحيحا وخاطئا في آن واحد) . نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز : p أو q أو r ...

ملاحظة :

إذا كانت عبارة p صحيحة فإننا نقول : لدينا p .

مثال : لدينا $\sqrt{2}$ عدد لا جذري .

2) العمليات على العبارات :

1 ـ نفي عبارة :

أنشطة تمهيدية : 1) نشاط 4 ص 15 من الكتاب المدرسي .

2) يقوم أحد التلاميذ إلى السبورة ويكتب مجموعة من العبارات الرياضية المتنوعة وما يكتبه التلميذ على السبورة ينفيه زملاؤه .

تعريف :

نفي عبارة p هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت p صحيحة ، ونرمز لها بالرمز $\overline{p}$ أو بالرمز $\neg p$.

ملاحظة :

* يمكن أن نمثل نفي العبارة p بالجدول التالي الذي يسمى جدول حقيقة $\overline{p}$.
(table de vérité de $\overline{p}$) .
* الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة .
* الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة .

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

2 ـ عطف عبارتين :

تعريف :

عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز(p وq) أو بالرمز ($p \wedge q$) وتكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا .

تمرين :

ـ أعط جدول حقيقة ($p \wedge q$) .

ـ تحقق أن $p \wedge (q \wedge r)$ و $(p \wedge q) \wedge r$ لهما نفس جدول الحقيقة .

3 ـ فصل عبارتين :

تعريف :

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز(p أوq) أو بالرمز($p \vee q$) وتكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين p و q على الأقل صحيحة .

تمرين :

ـ أعط جدول حقيقة ($p \vee q$) .

ـ تحقق أن $p \vee (q \vee r)$ و $(p \vee q) \vee r$ لهما نفس جدول الحقيقة .

4 ـ استلزام عبارتين :

نشاط تمهيدي :

نشاط 5 ص 16 من الكتاب المدرسي .

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A وغير متساوي الساقين .

نعتبر العبارات التالية :

p : " ABC مثلثا قائم الزاوية في A "

q : " $BC^2 = AB^2 + AC^2$ "

r : " ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية في A " .

s : " $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ "

لدينا : " إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A فإن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ " عبارة صحيحة .

يعبر عن ذلك بالقول : إذا كانت العبارة p صحيحة فإن العبارة q صحيحة .

ونقول أيضا : العبارة p تستلزم العبارة q

ونكتب : $p \Rightarrow q$.

هل الاستلزامات التالية صحيحة ؟ : $q \Rightarrow p$ ؛ $p \Rightarrow s$ ؛ $p \Rightarrow r$ ؛ $s \Rightarrow p$.

تعريف :

التزام عبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة ونرمز له بالرمز $p \Rightarrow q$
ويقرأ : p تستلزم q (أو إذا كانت p فإن q) .

تمرين :

ـ أعط جدول حقيقة ($p \Rightarrow q$) .
ـ هل العبارتان $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ لهما نفس جدول الحقيقة ؟
ـ هل العبارتين $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ و $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ لهما نفس جدول الحقيقة ؟

ملاحظات :

1) من خلال جدول حقيقة $p \Rightarrow q$ نستنتج أن :
* إذا علمنا أن $p \Rightarrow q$ عبارة صحيحة وعلمنا أن p عبارة صحيحة فإننا نستنتج أن q عبارة صحيحة .
* للبرهنة على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$ يكفي أن نفترض أن p عبارة صحيحة ونبين أن q عبارة صحيحة .
2) العبارة $q \Rightarrow p$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $p \Rightarrow q$.
3) العبارة $p \Rightarrow q$ تقرأ أيضا : " لكي تكون q يكفي أن تكون p .

تمرين 1 : (تمرين 1 ص 29 من الكتاب المدرسي)

5 ـ تكافؤ عبارتين :

نشاط تمهيدي :

في النشاط السابق لدينا : " ABC مثلثا قائم الزاوية في A يكافئ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ "
نقول إن العبارة p تكافئ العبارة q ونكتب : $p \Leftrightarrow q$.

تعريف :

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت p و q صحيحتين في آن واحد أو خاطئتين في آن واحد
ونرمز له بالرمز $p \Leftrightarrow q$ ، ويقرأ : p تكافئ q ؛ أو p إذا وفقط إذا كان q ؛ أو" p شرط لازم وكاف لكي تكون q"

تمرين 2 :

ـ حدد العبارات الصحيحة من بين العبارات التالية :
** ليكن n من IN : (n زوجي) ⇔ (n + 1 فردي)
** ليكن x من IR : ($x = 1$) ⇔ ($x^2 = 1$)
** ليكن x من IR* : ($x \succ 0$) ⇔ ($\frac{1}{x} \prec 0$) .
** لتكن A و B و I ثلاث نقط من المستوى . (I منتصف $[AB]$) $\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{BI} = \vec{0}$

II ـ الدوال العبارية ـ المكممات :

1) الدوال العبارية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر النص الرياضي : $x + 1 \geq 0$ حيث : $x \in IR$.
- من أجل $x = 1$ لدينا : $1 + 1 \geq 0$ عبارة صحيحة .
- من أجل $x = -2$ لدينا : $-2 + 1 \geq 0$ عبارة خاطئة .

كلما عوضنا x بقيمة محددة فإننا نحصل على عبارة إما صحيحة وإما خاطئة .
النص الرياضي : $x + 1 \geq 0$ حيث : $x \in IR$ يسمى دالة عبارية .

تعريف :

الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو أكثر) ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير (أو المتغيرات) بعنصر محدد من هذه المجموعة .

اليمني محمد

ترميز : حسب عدد المتغيرات نرمز للدالة العبارية بالرمز : $A(x)$ أو $P(x)$ أو $P(x,y)$ أو $P(x,y,z)$ أو ...

اصطلاح :
إذا كانت الدالة العبارية $A(x)$ تصبح عبارة صحيحة من أجل العنصر المحدد a فإننا نقول إن a تحقق الدالة العبارية $A(x)$ أو $A(x)$ تتحقق من أجل العنصر a .

2) المكممات :

أ ـ المكمم الكوني :

لتكن $P(x)$ دالة عبارية للمتغير x من مجموعة E غير فارغة .
انطلاقا من $P(x)$ ننشئ العبارة : $\forall x \in E : P(x)$ التي تكون صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق $P(x)$.
* الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني .
* العبارة : $\forall x \in E : P(x)$ تقرأ : مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ ؛ أو لكل x من E لدينا $P(x)$.

أمثلة :

- $\forall x \succ 0 : x+\frac{1}{x} \geq 2$ عبارة صحيحة
- $\forall x \in IR : x^2-1=0$ عبارة خاطئة
- $\forall x \in IR : x^2+1 \succ 0$ عبارة صحيحة .

ب ـ المكمم الوجودي :

لتكن $P(x)$ دالة عبارية للمتغير x من مجموعة E غير فارغة .
انطلاقا من $P(x)$ ننشئ العبارة : $\exists x \in E : P(x)$ التي تكون صحيحة إذا كان يوجد على الأقل عنصر من E يحقق $P(x)$
.
* الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي .
* العبارة : $\exists x \in E : P(x)$ تقرأ : يوجد على الأقل عنصر x من E بحيث لدينا $P(x)$.

أمثلة :

- $\exists x \in Q : x^2=2$ عبارة خاطئة .
- $\exists x \in IR : x^2-1=0$ عبارة صحيحة .
- $\exists x \in IR : x+\frac{1}{x} \geq 2$ عبارة صحيحة .

ملاحظة :
إذا كان يوجد عنصر وحيد يحقق $P(x)$ فإننا نكتب : $\exists! x \in E : P(x)$ وهذه العبارة تقرأ : يوجد عنصر وحيد x من E بحيث لدينا $P(x)$.

مثال : $\exists! n \in IN : n^2=9$ عبارة صحيحة .

3) عبارة بعدة مكممات :

- العبارتان : "$(\forall y \in IR)\ ;\ x^2+y^2 \geq xy\ :\ (\forall x \in IR)$" و "$(\forall x \in IR)\ ;\ x^2+y^2 \geq xy\ :\ (\forall y \in IR)$" متكافئتان .
- العبارتان : "$(\exists y \in IR)\ ;\ x^2+y^2 \geq xy\ :\ (\exists x \in IR)$" و "$(\exists x \in IR)\ ;\ x^2+y^2 \geq xy\ :\ (\exists y \in IR)$" متكافئتان .
- العبارة : $(\forall x \in IR);(\exists y \in IR): x+y=5$ عبارة صحيحة (نأخذ : $x=5-y$) .
- العبارة : $(\exists x \in IR);(\forall y \in IR): x+y=5$ خاطئة (لأن $y=-x+7$ مثلا لا يحقق العبارة .

بصفة عامة :
إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فإن ترتيبها ليست له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة .
إذا كانت المكممات من طبيعات مختلفة فإن ترتيبها له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة .

4) نفي عبارة مكممة :

- نفي العبارة : $\forall x \in E : P(x)$ هو العبارة : $\exists x \in E : \overline{P(x)}$.
- نفي العبارة : $\exists x \in E : P(x)$ هو العبارة : $\forall x \in E : \overline{P(x)}$.

أمثلة :

- نفي العبارة الصحيحة : $\forall x \in IR : x^2 \geq 0$ هو العبارة الخاطئة : $\exists x \in IR : x^2 \prec 0$.
- نفي العبارة الخاطئة : $\exists x \in IR : x^2 + 1 = 0$ هو العبارة الصحيحة : $\forall x \in IR : x^2 + 1 \neq 0$.
- نفي العبارة الخاطئة : $\forall x \in IR : x \succ 2$ هو العبارة الصحيحة : $\exists x \in IR : x \leq 2$.

تمرين 3 :

انظر لائحة التمارين

تمرين 4 :

انظر لائحة التمارين

تمرين 5 :

انظر لائحة التمارين

III – القوانين المنطقية ـ الاستدلالات الرياضية :

1) القوانين المنطقية : Les Lois Logiques :

تعريف :

كل عبارة مكونة من عدة عبارات p و q و r و ... مرتبطة بينها بعمليات منطقية وتكون صحيحة مهما كانت العبارات p و q و r و ... تسما قانونا منطقيا .

أمثلة :

1) $(p$ و $(p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ قانون منطقي .

2) قانونا موركان :

$(\neg(p$ أو $q) \Leftrightarrow (\overline{p}$ و $\overline{q}))$

و $(\neg(p$ و $q) \Leftrightarrow (\overline{p}$ أو $\overline{q}))$ هما قانونان منطقيان .

2) الاستدلالات الرياضية : Les Raisonnements Mathématiques :

1 ـ الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس : Raisonnement Par La Contraposée :

تعريف :

العبارة $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ تسمى الاستلزام المضاد للعكس للاستلزام $p \Rightarrow q$

خاصية : العبارة : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ قانون منطقي .

نتيجة :

إذا كان في بعض الأحيان يصعب البرهان مباشرة على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$ فإنه يمكن أن نبرهن على صحة الاستلزام المضاد للعكس $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ثم نستنتج أن : $p \Rightarrow q$. هذا النوع من الاستلزام يسمى الاستلزام المضاد للعكس .

تمرين تطبيقي :

بين أن : $\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow (xy \neq 1$ و $x \neq y) : (\forall (x;y) \in IR^2)$.

من أجل ذلك نبين أن : $(xy = 1$ أو $x = y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} : (\forall (x;y) \in IR^2)$.

تمرين 6 :

انظر لائحة التمارين.

2 ـ الاستدلال بالتكافؤات المتتالية : Raisonnement Par Equivalences Successives :

خاصية : العبارة : $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow r)$ قانون منطقي .

نتيجة : نستنتج من هذا القانون أن : إذا كان $q \Leftrightarrow p$ صحيح و $r \Leftrightarrow q$ صحيح فإن $r \Leftrightarrow p$ صحيح .

تمرين تطبيقي :

بين أن : $\left(\forall (x;y) \in IR^2\right) : \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$.

تمرين 7 :

تمرين 15 ص 30 من الكتاب المدرسي

3 ـ الاستدلال بالخلف : Raisonnement Par L'Absurde

خاصية : العبارة : $p \Rightarrow \left(\bar{p} \Rightarrow \bar{q} \text{ و } \bar{p} \Rightarrow q \right)$ قانون منطقي .

نتيجة : من هذا القانون نستنتج أنه إذا كان $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ صحيحا و $\bar{p} \Rightarrow q$ صحيحا فإن العبارة p صحيحة .

عمليا : نفترض أن $\bar{p}$ صحيحة ونبين أن $\bar{p}$ تستلزم $\bar{q}$ حيث أن q عبارة صحيحة .

ويكون لدينا : ($\bar{q}$ و q) عبارة صحيحة و هذا تناقض .

تمرين تطبيقي :

بين أن : $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin Q$; $n \in IN^*$.

تمرين 8 :

1) (P) و (Q) مستويان يتقاطعان وفق مستقيم (D) . A و B نقطتان من (P) حيث (AB) يقطع (D) في نقطة واحدة C . لتكن E نقطة من (Q) لا تنتمي إلى (D) .

بين أن المستويين (ABE) و (Q) غير منطبقين .

2) تمرين 29 ص 31 من الكتاب المدرسي .

3) أ ـ بين أن : x زوجي $\Leftrightarrow$ x^2 زوجي .

ب ـ استنتج أن : $\sqrt{2} \notin Q$.

4 ـ الاستدلال بفصل الحالات : Raisonnement Par Disjonction Des Cas :

خاصية : العبارة : $\left((p \text{ أو } q) \Rightarrow r \right) \Rightarrow \left(p \Rightarrow r \text{ و } q \Rightarrow r \right)$ قانون منطقي .

نتيجة : من هذا القانون نستنتج أنه إذا كانت (p أو q) عبارة صحيحة فإنه للبرهان على صحة العبارة r نبين أن الاستلزامين $q \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow r$ صحيحان ثم نستنتج أن العبارة r صحيحة .

تمرين تطبيقي :

بين أن العدد $n(n^2-1)$ مضاعف ل 3 لكل n من IN .

تمرين 9 :

1) تمرين 7 ص 30 من الكتاب المدرسي

2) تمرين 8 ص 30 من الكتاب المدرسي

3) تمرين 9 ص 30 من الكتاب المدرسي

5 ـ الاستدلال بالترجع : Raisonnement Par Récurrence :

خاصية :

لتكن $P(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي .

إ ذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $P(n_0)$ صحيحة ؛ وإذا كان $\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$ عبارة صحيحة ؛ فإن : " $\forall n \geq n_0 : P(n)$ " عبارة صحيحة .

تمرين تطبيقي :

بين بالترجع أن : $\forall n \geq 4 \ : \ 2^n \geq n^2$.

تمرين 10 : انظر لائحة التمارين