فرض محروس 4

التمرين الأول : (7 نقط)

نعتبر الدالة العددية للمتغير f الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|x^2-1|}+1}$

1) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة (0.5 ن)

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0=1$ (1 ن)

3) أ- بين أن $(\forall x\in]1,+\infty[)\ :\ f'(x)=\dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^3}$ (0.5 ن)

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ من أجل x تنتمي إلى المجال $[0,1[$ (0.5 ن)

ج- بين أن f تزايدية على $[0,1[$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f على $]1,+\infty[$ ثم أنجز جدول تغيراتها (1 ن)

4) بين أن $0\le f(x)\le x$ $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ (0.5 ن)

5) أرسم المنحنى (C_f) للدالة f (1 ن)

6) لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_0=\dfrac{3}{4}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $0<U_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ (0.5 ن)

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ (0.5 ن)

ج- بين أن $U_{n+1}\le\dfrac{2}{3}U_n$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ ثم أثبت أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ U_n\le\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (1 ن)

التمرين الثاني : (3 نقط و نصف)

1) أ- تحقق أن الزوج $(3,4)$ حل للمعادلة $(E):3x-2y=1$ ثم حدد مجموعة حلول المعادلة (E) (0.5 ن)

ب- بين أن $(14n+3)\wedge(21n+4)=1$ (0.5 ن)

2) نضع $d=(21n+4)\wedge(2n+1)$

أ- بين أن $d=1$ أو $d=13$ (0.5 ن)

ب- حدد n كي يكون $d=13$ (0.75 ن)

3) ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n\ge 2$ نعتبر العددين $a=21n^2-17n-4$ و $b=2n^2-n-1$

أ- تحقق أن $(n-1)/a$ و $(n-1)/b$ (0.25 ن)

ب- حدد تبعا لقيم n القاسم المشترك $\delta=a\wedge b$ (1 ن)

التمرين الثالث : (4 نقط و نصف)

الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

I- نعتبر النقط $A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$ حيث $a\ ;\ b\ ;\ c$ أعداد حقيقية غير منعدمة

1) أ- تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=bc\,\vec{i}+ac\,\vec{j}+ab\,\vec{k}$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن النقط $A\ ;\ B\ ;\ C$ غير مستقيمية (0.25 ن)

ج- أعط معادلة للمستوى (ABC) (0.75 ن)

2) لتكن (S) الفلكة التي مركزها O و شعاعها r

بين أن (ABC) مماس للفلكة (S) إذا و فقط إذا كان $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ (1 ن)

II- لتكن النقطة $B(0,2,0)$ و النقطتين $M\ ;\ M'$ بحيث $\overrightarrow{OM}=\alpha\vec{k}$ و $\overrightarrow{BM'}=\beta\vec{i}$

و نعتبر الفلكة (S') التي أحد أقطارها $[OB]$

1) أعط تمثيل برامتري للمستقيم (MM') (0.75 ن)

2) أثبت أن (MM') مماس للفلكة (S') إذا و فقط إذا كان $|\alpha\beta|=2$ (1.25 ن)