

فرض محروس رقم 3

ثانوية محمد الخامس التأهيلية	السنة الثانية شعبة العلوم الرياضية أ - ب	بتاريخ : 4 ماي 2016
المادة : رياضيات	المدة : ساعتان و نصف	المعامل : 9

سلم
التقييط

تمرين في الاحتمالات (5نقط)

صندوق يحتوي على أربع كرات سوداء و ثلاث كرات بيضاء.
نقوم بالتجربة التالية:

نسحب كرة من الصندوق - إذا كانت سوداء نرجعها إلى الصندوق و نسحب تانياً كرتين من هذا الصندوق .
- إذا كانت بيضاء نضعها جانباً و نسحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من هذا الصندوق.

(1) بين أن عدد الامكانيات المرتبطة بهذه التجربة هو 174 .

0.5 ن

(2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{47}{245}$.

0.5 ن

(3) علما أن الكرات الثلاث من نفس اللون ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة في السحبة الاولى بيضاء؟

0.5 ن

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء التي بقيت في الصندوق بعد انتهاء التجربة.
(أ) حدد القيم الممكنة ل X .

0.5 ن

(ب) بين أن $p(X=1) = \frac{76}{245}$ و أن $p(X=2) = \frac{122}{245}$.

1 ن

(ج) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي

1.5 ن

(5) نعيد التجربة السابقة ثلاث مرات مع إعادة الكرات المسحوبة إلى الصندوق في كل مرة.

0.5 ن

ما هو الاحتمال لكي نحصل على ثلاث كرات من نفس اللون مرتين بالضبط؟ أعط النتيجة بإفراط إلى 0,01 .

مسألة في التحليل (15 نقطة)

$$(I) \text{ لتكن } u \text{ الدالة العددية المعرفة على }]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ ب : } \begin{cases} u(x) = \frac{1}{\ln(x)}; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

0.5 ن

(1) أدرس اتصال و اشتقاق الدالة u على اليمين في 0 .

1 ن

(ب) احسب نهايات الدالة u و حدد الفروع اللانهائية للمنحنى C_u .

1 ن

(ج) أدرس تغيرات الدالة u ثم ضع جدول تغيراتها.

(2) (أ) بين أن $\int_x^{x^2} u(t) dt \leq \frac{x^2 - x}{2 \ln(x)}$; $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)$. (قم بفصل حالتين).

1.5 ن

(ب) نضع $\varphi(x) = \int_x^{x^2} u(t) dt$.

1 ن

أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

$$(II) \text{ لتكن } v \text{ الدالة العددية المعرفة على }]0,+\infty[\text{ ب : } \begin{cases} v(x) = (x-1)u(x); x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ v(0) = 0; v(1) = 1 \end{cases}$$

1 ن

(1) (أ) بين أن الدالة v متصلة على $]0,+\infty[$.

0.5 ن

(ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة v على اليمين في 0 و أعط تاويلا هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

فرض محروس رقم 3

(2) أ) بين أن $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[); v'(x) = \frac{1-x+x \ln(x)}{x \ln^2(x)}$	0.25 ن
ب) بين أن $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[); x \ln(x) > x-1$	0.5 ن
ج) ضع جدول تغيرات الدالة v وأنشئ منحناها C_v في معلم متعامد ممنظم (o, \vec{i}, \vec{j}) (نقبل أن v قابلة للاشتقاق في 1 و ان $v'(1) = \frac{1}{2}$)	1 ن
(3) بين أن: $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[); x-1 \leq \int_x^{x^2} \frac{v(t)}{t} dt \leq \frac{x^2-1}{2}$. (قم بفصل حالتين) (III) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ ب:	1.5 ن
$\begin{cases} f(x) = \ln(1+x) - \int_x^{x^2} u(t) dt; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$	
(1) أ) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (استعمل السؤال 2 ب) من I) ب) أدرس الفرع اللانهائي ل C_f	0.5 ن 0.5 ن
(2) أ) بين أن $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[); f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \int_x^{x^2} \frac{v(t)}{t} dt$.	0.5 ن
ب) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في 1. (استعمل السؤال 3 من II)	1 ن
ج) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \ln 2$	0.25 ن
(3) أ) بين أن: $\exists \alpha \in]0,1[; f'(\alpha) = 0$.	0.25 ن
ب) بين أن $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[); f'(x) = \frac{1}{x+1} - v(x)$.	0.25 ن
(4) أ) بين أن الدالة f' تناقصية قطعاً على $]0,+\infty[$ ثم استنتج اشارتها. ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .	0.75 ن 0.25 ن
(IV) لتكن F الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ ب: $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x+1} e^{\int_x^{x^2} u(t) dt}; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ F(0) = F(1) = 1 \end{cases}$	
(1) تحقق أن $(\forall x \in]0,+\infty[); F(x) = e^{-f(x)}$	0.5 ن
(2) حدد الفرع اللانهائي ل C_F	0.25 ن
(3) ضع جدول تغيرات الدالة F	0.5 ن

إنتهى