التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = \frac{U_n + 6}{U_n + 2}$

1) أ- بين أن $U_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $U_{2n+1} < 2 < U_{2n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) نضع $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 3}$ لكل عدد طبيعي n . بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها و أحسب V_n بدلالة n

3) أ- بين أن $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|U_n - 2|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $|U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

5) لكل عدد طبيعي n غير منعدم نضع $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n} U_{2k+1}$

أ- بين أن $2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^k \leq U_{2k+1} \leq 2$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $2 + \frac{13}{8n} + \frac{1}{24n}\left(\frac{1}{9}\right)^n \leq a_n \leq 2 + \frac{2}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الثاني

ليكن α من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ و بحيث $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

1) بين أن $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) أ- بين أن $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

ب- استنتج أن $\cos 3\alpha = \sin\alpha$

3) حل في $[0, 2\pi]$ المعادلة $\cos 3x = \sin x$ ثم استنتج أن $\alpha = \frac{\pi}{8}$

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x - \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin x = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

التمرين الثالث

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^3 + 8}$ ، $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x}$ ، $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x} - 3}$

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + 4x} + x$ ، $\lim_{x\to +\infty} \frac{x - 3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+4} - 2x}$ ، $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 4}\cos 2x - 2}{x\sin 3x}$

التمرين الرابع

المستوى (P) منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر المتجهتين $\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$ و $\vec{v} = \vec{i} + \left(2 - \sqrt{3}\right)\vec{j}$

1) حدد الكتابة المثلثية للمتجهة $\vec{u}$

2) أ- تحقق أن $\|\vec{v}\| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ و أحسب $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

ب- أحسب $\sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ و استنتج قياس الزاوية $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

3) بين أن $[2\pi]$ $\overline{\left(\widehat{\vec{i}, \vec{v}}\right)} \equiv \frac{\pi}{12}$ و استنتج قيمة كل من $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$