تصحيح الفرض المحروس 1 الدورة II من طرف التلميذ بكر كامل

01 التمرين الاول

لنملأ الجدول التالي :

$f_d'\left(\frac{1}{2}\right)=0$	$f_d'(2)=2$	$f_g'(2)=\frac{1}{2}$
f غير قابلة للاشتقاق في 2 .		النقطة C التي أفصولها $x_0=2$ تسمى نقطة انعطاف .

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	|	+	||	−	
تغيرات f	-2.5	↗	2.9	↘	2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

02- التمرين الثاني:

لنحسب مشتقات f(x) في كل حالة :

-1- $f(x)=\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+8\right)^7$

$$f'(x)=\left[\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+8\right)^7\right]' \Leftrightarrow f'(x)=7\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+8\right)^6\left(3x^2-3x\right)$$

خلاصة : $f'(x)=7\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+8\right)^6\left(3x^2-3x\right)$

-2- $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+5}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x}{x+5}\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\frac{(x^2+2x)'\times(x+5)-(x+5)'\times(x^2+2x)}{(x+5)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-3x^2}{(x+5)^2}$$

خلاصة : $f'(x)=\dfrac{-3x^2}{(x+5)^2}$

-3- $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

$$f(x)'=\left[x\sqrt{x^2+1}\right]' \Leftrightarrow f(x)'=x'\left(\sqrt{x^2+1}\right)+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'x$$

$$\Leftrightarrow f(x)'=\sqrt{x^2+1}+2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)'=\sqrt{x^2+1}+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)'=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

خلاصة : $f(x)'=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

-4- $f(x)=5\sin(3x)+2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$f(x)'=\left[5\sin(3x)+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]' \Leftrightarrow f(x)'=15\cos(3x)-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

خلاصة : $f(x)'=15\cos(3x)-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

-03-التمرين الثالث :

1) -أ- لنتحقق ان D_f مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$

$$x\in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>0$$

$$\Leftrightarrow x^2+1>0$$

$$\Leftrightarrow x^2>-1$$

و هذا دائما صحيح

خلاصة : $D_f=\mathbb{R}$

- ب - لنبين أن f زوجية :

★ لدينا لكل $x\in D_f$ كذلك $-x\in D_f$

★ و لدينا :

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}+\frac{4}{\sqrt{(-x)^2+1}} \Leftrightarrow f(-x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$$

خلاصة : f زوجية

ج- تحديد D_E مجموعة دراسة f :

بما أن f زوجية يكفي دراستها على المجال $[0,+\infty[$

خلاصة : $D_E=[0,+\infty[$

2) أ- لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

لأن

$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}=0 \right.$ و $\left. \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty \right)$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب - لنتحقق أن : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}-x\\
&=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\\
&=0
\end{aligned}$$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0 \right.$ و $\left. \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}=0 \right)$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

ج - لنعطي تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها:

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل ل C_f بجوار $\pm\infty$

3) أ- لنبين أن لكل x من D_f

$$f'(x)=\frac{x(x^2-3)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$f'(x)=\left[\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right]' \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+4\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-4x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3+x-4x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x(x^2-3)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

خلاصة :

$$f'(x)=\frac{x(x^2-3)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

ب - لنحدد إشارة f' على $\mathbb{R}$:

إشارة f' هي إشارة $x(x^2-3)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

خلاصة :

- $f'(x)\geq 0$ على المجال $\left[-\sqrt{3},0\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right[$
- $f'(x)\leq 0$ على المجال $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[0,\sqrt{3}\right]$

ج- جدول تغيرات على D_E ثم على D_F

* على $D_E = [0,+\infty[$

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f '		−	0	+	
f	5	↘	4	↗	$+\infty$

* على $D_F = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
		−	0	+	0	−	0	+	
f	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

4) لنستنتج تقعر المنحنى C_f و أنه يقبل نقطتي إنعطاف على D_F :

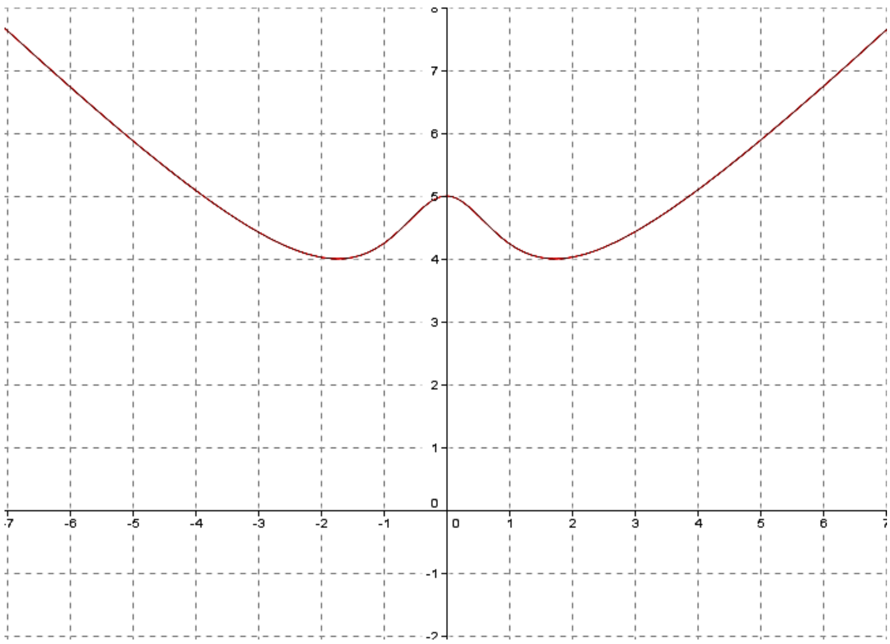
x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''		+	0	−	0	+	
تقعر f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

لدينا: $f''(x)=0$ عند $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

و منه C_f يقبل نقطتي انعطاف.

خلاصة : C_f يقبل نقطتي إنعطاف.

5) إنشاء C_f



-04- التمرين الرابع:

1) لنحدد صيغة الشلجم :

من أجل ذلك نحل النظمة $\begin{cases} f(0)=8 \\ f(6)=0 \\ f(-6)=0 \end{cases}$

نعلم أن صيغة الشلجم تكتب على شكل $f(x):\ ax^2+bx+c=0$

و منه :

$$\left.\begin{matrix} f(0)=8 \\ f(6)=0 \\ f(-6)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c=8 \\ 36a+6b+8=0 \\ 36a-6b+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=8 \\ a=\dfrac{-9}{2} \\ b=0 \end{cases}$$

خلاصة : $f(x):\ \frac{-9}{2}x^2+8=0$

2) لنعطي $S(x)$ مساحة المثلث بدلالة x

$$S(x)=\frac{(x+6)\times y}{2}\Leftrightarrow S(x)=\frac{(x+6)\times f(x)}{2}$$

$$\Leftrightarrow S(x)=\frac{(x+6)\times\left(\frac{-9}{2}x^2+8\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow S(x)=\frac{\frac{-9}{2}x^3-27x^2+8x+48}{2}$$

$$\Leftrightarrow S(x)=-\frac{9}{4}x^3-\frac{27}{2}x^2+4x+24$$

خلاصة : $S(x)=-\frac{9}{4}x^3-\frac{27}{2}x^2+4x+24$

3) لنحدد إحداثيتي p التي من أجلها تكون $S(x)$ قصوية:

لدينا: $S'(x)=\frac{-27}{4}x^2-27x+4$