الأولى علوم رياضية	فرض محروس 3	ذ : المانتي

التمرين الأول

نعتبر المجموعات $A=\{x=3k+2 / k\in\mathbb{Z}\}$ ، $B=\{x=5k'+8 / k'\in\mathbb{Z}\}$ و $E=\{x=12p-1 / p\in\mathbb{Z}\}$

1) أ- تحقق أن $38\in A$. هل $38\in B$ ؟

ب- بين أن $E\not\subset B$ و أن $E\subseteq A$

2) حدد التقاطع $A\cap B$

التمرين الثاني

ليكن f تطبيق معرف من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

1) أحسب $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. هل f تبايني على $\mathbb{R}^+$ ؟

2) أ- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad x+1\geq 2\sqrt{x}$

ب- استنتج أن $f(\mathbb{R}^+)\subseteq\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. هل f شمولي من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ ؟

3) أنشر $(2t-1)(t-2)$ و استنتج $f^{-1}\left(\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right]\right)$

4) ليكن g قصور f على المجال $I=]0,1[$

أ- بين أن $(\forall(x,y)\in I^2)\quad g(x)=g(y)\Rightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{xy}-1)=0$

ب- استنتج أن g تبايني على المجال I

ج- بين أن g تقابل من I نحو المجال $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ و عرف تقابله العكسي g^{-1}

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-1$

1) أ- بين أن $U_n\geq 2\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن $U_{n+1}\geq\dfrac{3}{2}U_n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ و استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

ج- بين بالترجع أن $U_n\geq 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

2) نضع $V_n=U_n-1$ لكل عدد طبيعي n

بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا عناصرها ثم أحسب U_n بدلالة n

3) نعتبر المتتالية $(S_n)_n$ المعرفة بما يلي : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\dfrac{(-1)^k}{U_k}$ و نضع $X_n=S_{2n}$ و $Y_n=S_{2n+1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $Y_n\leq X_n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة كل من المتتاليتين $(X_n)_n$ و $(Y_n)_n$

ج- بين أن $|X_n-S_n|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$