


أولى علوم رياضية	فرض محروس 3	
الدورة 1	2014/01/09	ثانوية أنيس الخاصة

التمرين 1 (7 نقط)

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{7}{3} \\ U_{n+1} = \frac{7U_n + 3}{3U_n + 7} \end{cases}$$

1- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n \geq 1$

1

2- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$. استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n \leq \frac{7}{3}$

1.5

3- نضع: $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

أ- بين أن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية و حدد عناصرها.

1.5

ب- استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

1.5

ج- أحسب المجموع: $\sum_{k=1}^n \frac{2}{U_k + 1}$

1.5

التمرين 2 (5 نقط)

المستوى (P) منسوب الى م.م.م.م (O, \vec{i}, \vec{j}) .

نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها: $(C): x^2 + y^2 - x\sqrt{3} - y = 0$

ولتكن النقطتين: $A(\sqrt{3}, 1)$ و $B(\sqrt{3}, 0)$

1- حدد مركز و شعاع الدائرة (C)

1

2- حدد نقطتي تقاطع الدائرة (C) مع محور الأفاصيل.

1

3- أحسب $\cos(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ و $\sin(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$

1.5

4- أعط معادلة المستقيم (D) المماس للدائرة (C) عند النقطة A .

1

5- بين أن: $(D) \perp (OA)$

0.5

التمرين 3 (4 نقط)

نعتبر المتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي :

$$v_0 = -1 \quad \text{و} \quad u_0 = 2 \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

نضع : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = u_n + 2v_n$

1- بين أن (w_n) متتالية هندسية ثم حدد w_n بدلالة n

2- بين بالترجع أن $t_n = 0$ لكل n من \mathbb{N} .

3- استنتج u_n بدلالة n .

4 - احسب المجموع : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

1
1
1
1

أسئلة مستقلة**التمرين 4 (4 نقط)**

1- لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية بحيث $u_n > 0$ و نضع :

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}}$$

أثبت أن : $\forall n \geq 2: X_n = \frac{(n-1)}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}$

1

2- لتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية بحيث $v_n > 0$ وأساسها $q \neq 1$ و نضع :

$$Y_n = \frac{\sqrt{u_2}}{\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}} + \frac{\sqrt{u_3}}{\sqrt{u_3} - \sqrt{u_2}} + \dots + \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}}$$

برهن أن : $\forall n \geq 2: Y_n = (n-1) \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{q}}} \right)$

1

3- لتكن (a_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2 + k}$$

بين أن : $\frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq a_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$

2

بالتوفيق