تصحيح الفرض المحروس رقم 3

التمرين 1

1) لدينا "P: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(\exists n\in\mathbb{N})\ nx>1$"

إذن "$\bar{P}$: $(\exists x\in\mathbb{R}^{+*})(\forall n\in\mathbb{N})\ nx\leq 1$"

• ولدينا "Q: $[(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ |x|<\frac{1}{n}]\Rightarrow x=0$"

- نفي العبارة Q:

نعلم أن نفي الاستلزام $a\Rightarrow b$

هي العبارة a و $\bar{b}$

ومنه فإن:

"$\bar{Q}$: $((\forall n\in\mathbb{N}^*)\ |x|<\frac{1}{n})$ و $x\neq 0$"

2) "P: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(\exists n\in\mathbb{N})\ nx>1$"

لنبين أن P صحيحة

$$nx>1 \Leftrightarrow n>\frac{1}{x}$$

ونعلم أن $E(\frac{1}{x})\leq\frac{1}{x}<E(\frac{1}{x})+1$

نضع $P=E(\frac{1}{x})$ عدد طبيعي لأن $(\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{+*})$

ومنه $P\leq\frac{1}{x}<P+1$; نضع $n=P+1$

$$\frac{1}{x}<n$$

إذن $(\exists n=P+1\in\mathbb{N})\ nx>1$

التمرين 2

1) بين أن $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)(x>2, y>2)\Rightarrow(xy>x+y)$

$(x>2, y>2)\Rightarrow(x-1>1, y-1>1)$

$\Rightarrow (x-1)(y-1)>1$

$\Rightarrow 1+xy-x-y>1$

$\Rightarrow xy>x+y$

2) بين بالاستدلال بالعكس:

$(\forall x>2)(\forall y>2): (x\neq y)\Rightarrow(x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1})$

أي نبين أن

$(\forall x>2)(\forall y>2)\ (x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1})\Rightarrow(x=y)$

$x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1}\Rightarrow x^2(y-1)=y^2(x-1)$

$\Rightarrow x^2y-x^2-y^2x+y^2=0$

$\Rightarrow xy(x-y)-(x-y)(x+y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(xy-x-y)=0$

$(\forall x>2)(\forall y>2)$ $xy>x+y$

فإن $xy-x-y\neq 0$

وعليه $x=y$

وبالتالي فإن

$(\forall x>2)(\forall y>2): [x\neq y\Rightarrow x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1}]$

التمرين 3

1) بين بالترجع أن

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{k=n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$$

من أجل $n=0$

لدينا $\frac{1+1}{3^1}=\frac{2}{3}$

و $\frac{1}{4}\left(5-\frac{2\times1+5}{3^1}\right)=\frac{2}{3}$

علاقة صحيحة

نفترض أن: $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$

ونبين أن: $\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$

لدينا

$$\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{k+1}{3^k}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k+1}{3^k}+\frac{n+2}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)+\frac{n+2}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2n+5}{3^n}+\frac{4n+8}{3^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{6n+15-4n-8}{3^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2n+7}{3^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$$

وحسب مبدأ الترجع فإن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{k=n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$$

2) بين بالترجع أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k+1}k=n+1$$

من أجل $n=1$

لدينا $\sum_{k=1}^{k=3}(-1)^{k+1}k=1-2+3=2=1+1$

علاقة صحيحة.

نفترض أن $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1$

ونبين أن $\sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^{k+1} k = n+2$

لدينا
$$\sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k + (-1)^{2n+3}(2n+2) + (-1)^{2n+4}(2n+3)$$
$$= n+1-(2n+2)+(2n+3)$$
$$= n+1-\cancel{2n}-2+\cancel{2n}+3$$
$$= n+2$$

وبالتالي فإن
$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1$$

التمرين 4:

1) احسب u_1 وبين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ a<u_n<b$

لدينا
$$u_1 = \frac{ab}{a+b-u_0} = \frac{ab}{a+b-\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{2a+2b-a-b}$$
$$u_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

من أجل $n=0$: $a<u_0=\frac{a+b}{2}<b$ صحيحة

نفترض أن: $a<u_n<b$

ونبين أن: $a<u_{n+1}<b$

لدينا $a<u_n<b$
$$-b<-u_n<-a$$
$$a<a+b-u_n<b$$
$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a+b-u_n}<\frac{1}{a}$$
$$a<\frac{ab}{a+b-u_n}<b$$
$$a<u_{n+1}<b$$

وحسب مبدأ الترجع

فإن: $a<u_n<b$

2) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية:

يعني نبين أن $u_{n+1}<u_n$

لدينا
$$u_{n+1}-u_n = \frac{ab}{a+b-u_n}-u_n$$
$$= \frac{ab-au_n-bu_n+u_n^2}{a+b-u_n}$$
$$= \frac{a(b-u_n)-u_n(b-u_n)}{a+b-u_n}$$
$$= \frac{(b-u_n)(a-u_n)}{a+b-u_n}$$

ولدينا $a<u_n<b$

يعني $-b<-u_n<-a$

$a-u_n<0$ و $b-u_n>0$

وبما أن $0<a<a+b-u_n<b$

فإن $\frac{(b-u_n)(a-u_n)}{a+b-u_n}<0$

إذن $u_{n+1}<u_n$

ومنه فإن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية.

3) أ- بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{a}{b}$.

لدينا
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$$
$$= \frac{\frac{ab}{a+b-u_n}-a}{\frac{ab}{a+b-u_n}-b}$$
$$= \frac{ab-a^2-ab+au_n}{ab-ab-b^2+bu_n}$$
$$= \frac{a(a-u_n)}{b(b-u_n)}$$
$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{u_n-a}{u_n-b}$$
$$= \frac{a}{b}\cdot v_n$$

إذن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{a}{b}$

ب- لنبين أن $u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = \frac{a \cdot b^0 + b \cdot a^0}{a^0 + b^0}$

$u_0 = \frac{a+b}{2}$ صحيحة

نفترض أن: $u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

ونبين أن: $u_{n+1} = \frac{ab^{n+1} + ba^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$

لدينا

$$u_{n+1} = \frac{ab}{a+b-u_n}$$

$$= \frac{ab}{a+b-\frac{ab^n+ba^n}{a^n+b^n}}$$

$$= \frac{ab}{\frac{(a+b)(a^n+b^n) - ab^n - ba^n}{a^n+b^n}}$$

$$= \frac{ab(a^n+b^n)}{a \cdot a^n + \cancel{ab^n} + \cancel{ba^n} + b \cdot b^n - \cancel{ab^n} - \cancel{ba^n}}$$

$$= \frac{b \cdot a^{n+1} + ab^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

وحسب مبدأ الترجع فإن

$$u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$$

التمرين 5:

1) احسب u_2 و u_3

لدينا

$$u_2 = 5u_1 - 6u_0$$
$$= 5 \times 1 - 6 \times 2$$
$$= 5 - 12$$
$$u_2 = -7$$

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1$$
$$= 5 \times (-7) - 6 \times 1$$
$$= -35 - 6$$
$$u_3 = -41$$

2) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

نضع $V_n = u_{n+1} - 3u_n$

لدينا

$$V_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$= 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 2u_{n+1} - 6u_n$$
$$= 2(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= 2 \cdot V_n$$

إذن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

من إنجاز التلميذ ياسر السياري

التمرين 4:

3) ب- لدينا

$$V_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$$

$$V_n u_n - bV_n = u_n - a$$

$$V_n u_n - u_n = bV_n - a$$

$$u_n(V_n - 1) = bV_n - a$$

$$u_n = \frac{bV_n - a}{V_n - 1}$$

وعلما أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$ و $V_0 = -1$

فإن:

$$V_n = V_0 q^n$$

$$V_n = -\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

وعليه:

$$u_n = \frac{-b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n - a}{-\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}$$

$$u_n = \frac{-\frac{a^n b}{b^n} - \frac{ab^n}{b^n}}{-\frac{a^n}{b^n} - \frac{b^n}{b^n}}$$

$$u_n = \frac{-a^n b - ab^n}{-a^n - b^n}$$

$$u_n = \frac{a^n b + ab^n}{a^n + b^n}$$