التمرين الأول

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3 - U_n} \end{cases}$

1. بين أن $1 < U_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
2. تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$ و أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$
3. نضع $V_n = \dfrac{2 - U_n}{1 - U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$
   أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n
   ب- استنتج الحد العام U_n بدلالة n
4. لكل عدد طبيعي غير منعدم n نضع : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n} U_p$
   أ- بين أن $U_{n+1} - 1 \le \dfrac{2}{3}(U_n - 1)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
   ب- أثبث أن $U_n - 1 \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
   ج- استنتج أن $1 + \dfrac{1}{n} \le S_n \le 1 + \dfrac{5}{2n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$

1. بين أن $-1 < U_n \le 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
2. أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$
3. نضع $V_n = \dfrac{1}{1 + U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$
   أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب V_n بدلالة n
   ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n
4. لكل عدد طبيعي غير منعدم n نضع : $S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n} V_k$. بين أن $\left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| \le \dfrac{3}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{k}{3^k}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) أحسب U_1 ; U_2
2) أ- بين بالترجع أن $p \le \left(\dfrac{3}{2}\right)^p$ $(\forall p \ge 2)$
   ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ مكبورة بالعدد 1