السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال نموذج 1 ـ حلول مقترحة	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : $f(x)=x^3-3x$

1

لدينا لكل $x\neq y$:

$$f(x)-f(y)=(x^3-3x)-(y^3-3y)=x^3-y^3-3x+3y=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3(x-y)$$

$$f(x)-f(y)=(x-y)[x^2+xy+y^2-3]$$

بالتالي : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2-3$

2

ليكن x و y عددين مختلفين من $[1,+\infty[$ ، لدينا :

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\geq 1 \\ y^2\geq 1 \\ xy\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+xy\geq 3 \Rightarrow T(x,y)\geq 0$$

ليكن x و y عددين مختلفين من $[-1,1]$ ، لدينا :

$$\begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|\leq 1 \\ |y|\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\leq 1 \\ y^2\leq 1 \\ |xy|\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\leq 1 \\ y^2\leq 1 \\ -1\leq xy\leq 1 \end{cases} \quad x^2+y^2+xy\leq 3 \Rightarrow T(x,y)\leq 0$$

ليكن x و y عددين مختلفين من $]-\infty;-1]$ ، لدينا :

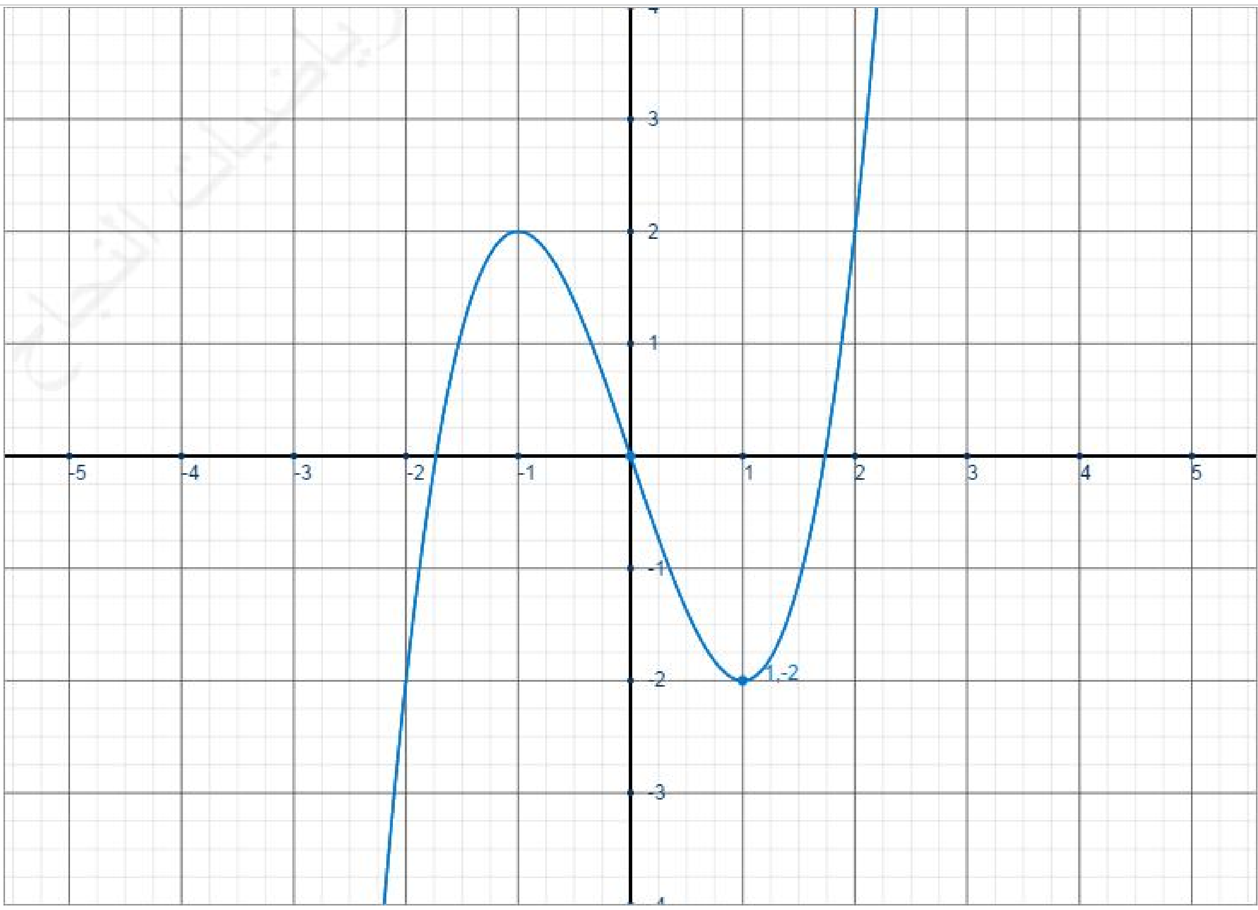
$$\begin{cases} x\leq -1 \\ y\leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x\geq 1 \\ -y\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\geq 1 \\ y^2\geq 1 \\ xy\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+xy\geq 3 \Rightarrow T(x,y)\geq 0$$

إذن f تزايدية على $[1,+\infty[$ و $]-\infty;-1]$ و تناقصية على $[-1,1]$

3

لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ ou \ x=\sqrt{2} \ ou \ x=-\sqrt{2}$

بالتالي (Cf) يقطع محور الأفاصيل في النقط : $O(0\,;0)$ و $A(\sqrt{2}\,;0)$ و $B(-\sqrt{2}\,;0)$

4 

5 لدينا : $f(x)=m-1 \Leftrightarrow x^3-3x+1-m=0$

- إذا كان : $m-1<-2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا
- إذا كان : $m-1=-2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلين بالظبط
- إذا كان : $-2<m-1<2$ فالمعادلة السابقة تقبل ثلاث حلول بالظبط
- إذا كان : $m-1=2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلين بالظبط
- إذا كان : $m-1>2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا

باستعمال نتائج السؤال 2)، أوجد معللا جوابك جدول تغيرات الدوال التالية :

لدينا الدالة $p:\ x\to|x|^3-3|x|$ دالة زوجية و تساوي $f(x)$ على $[0;+\infty[$

إذن لها نفس رتابة f على $[0;+\infty[$ و لها رتابة معاكسة في $]-\infty;0]$

و بكون $g(x)=p(x)+1$ فإن g تزايدية على $[1,+\infty[$ و تناقصية على $[0,1]$ و g تزايدية على $[-1,0]$ و تناقصية على $]-\infty;-1]$

6 بما أن $\frac{1}{5}>0$ فالدالة $x\to\frac{x^3-3x}{5}$ لها نفس تغيرات f و بالتالي h $x\to\frac{x^3-3x}{5}$ لها نفس تغيرات f

الدالة $h(x)=|f(x)|$ إذن $h(x)=f(x)$ عندما يكون $f(x)\geq 0$ أي عندما يكون : $x\in[-\sqrt{2};0]\cup[\sqrt{2};+\infty[$ و $h(x)=-f(x)$

إذن h تناقصية على $]-\infty;-\sqrt{2}]$ و تزايدية على $[-\sqrt{2},-1]$ و تناقصية على $[-1,0]$ و تزايدية على $[0,1]$ و h تناقصية على $[1,\sqrt{2}]$ و تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$

7	$p(x)=f\left(\sqrt{x}\right)+1$ ، $Dp=[0;+\infty[$ على $[0;+\infty[$ الدالة $m(x)=\sqrt{x}$ تزايدية و $m([0;+\infty[)=[0;+\infty[$ إذن ل p نفس تغيرات f على $[0;+\infty[$ $Dq=IR-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$ ، $q(x)=s(f(x))=s\circ f(x)$ حيث $s(x)=\dfrac{1}{x}$ بما أن s تناقصية على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$ فإن ل $q(x)$ عكس تغيرات $f(x)$ على Dq في هذا السؤال اختصرنا طريقة الجواب لضيق الوقت.	

تمرين 2 : نعتبر الدالتين $f(x)=4x^3-3x$ و $g(x)=2x^2-1$

لدينا :

$$f\circ g(x)=4(g(x))^3-3g(x)=4(2x^2-1)^3-3(2x^2-1)=4\left((2x^2)^3-3(2x^2)^2+3(2x^2)-1\right)-6x^2+3$$

$$f\circ g(x)=4(8x^6-12x^4+6x^2-1)-6x^2+3$$

$$f\circ g(x)=32x^6-48x^4+24x^2-4-6x^2+3$$

$$f\circ g(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

و

$$g\circ f(x)=2(4x^3-3x)^2-1=2(16x^6-24x^4+9x^2)-1$$

$$g\circ f(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

بالتالي : $g\circ f(x)=f\circ g(x)$ $\forall x\in IR$

تمرين 3 : نعتبر الدالة $f(x)=1+\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

1	نعلم أن : $\forall x\in IR$ $\dfrac{x}{4}\geq E\left(\dfrac{x}{4}\right)$ منه $\forall x\in IR$ $x\geq 4E\left(\dfrac{x}{4}\right)$ منه $\forall x\in IR$ $x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)\geq 0$ بالتالي : $Df=IR$
2	$\forall x\in IR$ $f(x+4)=1+\sqrt{x+4-4E\left(\dfrac{x+4}{4}\right)}=1+\sqrt{x+4-4E\left(\dfrac{x}{4}+1\right)}$ لدينا : $\forall x\in IR$ $f(x+4)=1+\sqrt{x+4-4\left[E\left(\dfrac{x}{4}\right)+1\right]}=1+\sqrt{x+4-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)-4}$ بالتالي f دورية أحد أدوارها 4 . $\forall x\in IR$ $f(x+4)=f(x)$
3	لدينا : $\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$ $\forall x\in IR$ إذن : $f(x)\geq 1$ $\forall x\in IR$ نعلم أن $\dfrac{x}{4}<E\left(\dfrac{x}{4}\right)+1$ $\forall x\in IR$ منه : $x<4E\left(\dfrac{x}{4}\right)+4$ $\forall x\in IR$ منه : $x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)<4$ $\forall x\in IR$ منه : $\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}<2$ $\forall x\in IR$ منه : $f(x)<3$ $\forall x\in IR$ بالتالي : $1\leq f(x)<3$ $\forall x\in IR$