تصحيح الفرض المحروس 1 – 2015/2014

01.

1. ندرس تباينية f :

لدينا : $\left(\forall x,x' \in E : f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'\right) \Leftrightarrow$ (f تبايني)

ليكن x و x' من $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x)=f(x') \Rightarrow \sin x = \sin x'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2k\pi \\ x = \pi - x' + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه: f غير تبايني.

مثال مضاد:

نأخذ: $x=\frac{\pi}{4}$ و $x'=\frac{\pi}{4}+6\pi$

ومنه: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}+6\pi\right)$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\pi-\frac{\pi}{4}+6\pi\right)$

ولكن : $\frac{\pi}{4} \neq \pi-\frac{\pi}{4}+6\pi$.

خلاصة : f غير تبايني.

---

1. ندرس شمولية f :

نأخذ 2 - من $\mathbb{R}$ نبحث هل له سابق x من $\mathbb{R}$

إذن : $f(x)=-2$

و منه : $\sin x = -2$

و هذا غير ممكن لأن : $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه: f غير شمولي.

خلاصة : f غير شمولي.

---

2. نحدد : $g^{-1}(\{3\})$

لدينا: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

ليكن $(n,p) \in \mathbb{N}^2$

$$(n,p) \in g^{-1}(\{3\}) \Leftrightarrow g^{-1}((n,p)) \in \{3\}$$

$$\Leftrightarrow g((n,p)) = 3$$

$\Leftrightarrow n+p=3$

$\Leftrightarrow (n,p)\in\{(1,2),(2,1),(0,3),(3,0)\}$

خلاصة : $g^{-1}(\{3\})=\{(1,2),(2,1),(0,3),(3,0)\}$.

3. نبين أن : h تقابلي

لكي يكون h تقابلي :

f تقابلي $\Leftrightarrow$ $(\forall a'\in F,\exists! a\in E : a'=f(a))$

مع $a=(x,y)$ و $a'=(x',y')$ و $E=\mathbb{R}^2$ و $F=\mathbb{R}^2$.

لهذا نبين أن المعادلة التالية تقبل حل وحيد :

$$h((x,y))=(x',y')\Leftrightarrow(x+3y,x-y)=(x',y')$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=x'\\x-y=y'\end{cases}$$

ومنه نحل النظمة : $\begin{cases}x+3y=x'\\x-y=y'\end{cases}$

نحسب Δ : $\Delta=\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$

ومنه نظمة هي نظمة كرامير تقبل حل وحيد.

وبالتالي h تقابلي.

خلاصة : h تقابلي من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$.

3. نحدد $h(\mathbb{R}^2)$ و $h^{-1}(\mathbb{R}^2)$:

بما أن h تقابلي فإن : $h(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$ و $h^{-1}(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$

.02

1. قيمة حقيقية العبارة التالية : $\dfrac{1}{n^3}\leq\dfrac{1}{(n-2)(n-1)n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1,2\}$

لدينا :

$-2\leq 0\Rightarrow n-2\leq n$. و $-1\leq 0\Rightarrow n-1\leq n$ و $n\leq n$

ومنه ضرب طرف بطرف : $(n-2)\times(n-1)\times n\leq n\times n\times n$ (لأن الأعداد موجبة)

إذن : $(n-2)\times(n-1)\times n\leq n^3$

فإن : $\dfrac{1}{n^3}\geq\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}$

وبالتالي : العبارة خاطئة .

خلاصة : العبارة خاطئة .

2. نبين أن : $\forall p \in \mathbb{N}^* \; , \; 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{p}$

نأخذ : $\forall k \in \mathbb{N}^* \; , \; 1 \leq k \leq p$

ومنه :

$$\begin{aligned}
1 \leq k \leq p &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{p} \\
&\Rightarrow \sqrt{p} \leq \sqrt{k} \times \sqrt{p} \leq p \left(\times \sqrt{p}\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{p}} \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \underbrace{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}}_{p} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \cancel{p} \times \frac{1}{\cancel{p}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}}\right] \geq 1 \\
&\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}}\right] \geq \sqrt{p}
\end{aligned}$$

خلاصة : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{p}$

3. نبين أن المعادلة (E) ليس لها حل :

لدينا :

$$x \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+10 \geq 9 \\ x+100 \geq 99 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 0 \\ \sqrt{x+10} \geq 3 \\ \sqrt{x+100} \geq \sqrt{99} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}+\sqrt{x+100} \geq 3+\sqrt{99} > 12 \; ; \quad \left(\sqrt{99} > 9\right)$$

وبالتالي : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}+\sqrt{x+100} \neq 12$

خلاصة : المعادلة ليس لها حلول

03.

1. نستدل بالخلف أن : q لا يقسم $n+1$:

نفترض أن: q يقسم $n+1$ إذن: $n+1=qk'$

ونعلم أن: $n=qk$

ومنه: $qk+1=qk'$

إذن: $1=qk'-qk$

فإن: $1=q\times(k'-k)$

وبالتالي: $q=1$ وهذا غير ممكن إذن ما فترضناه كان خاطئا

ومنه: q لا يقسم $n+1$

خلاصة : q لا يقسم $n+1$

2. نبين أن : العدد $A_n=4^{2n+2}-15n-16$ يقبل القسمة على 225

- نتحقق أن العلاقة A_n صحيحة لـ $n=0$:

لدينا : $A_n=4^{2n+2}-15n-16$

أي :

$$A_0=4^{2\times0+2}-15\times0-16$$
$$A_0=4^2-0-16$$
$$A_0=16-16$$
$$A_0=0$$

وبالتالي: العلاقة A_n صحيحة لـ $n=0$.

- نفترض أن العلاقة A_n صحيحة إلى n :

أي أن: العدد $A_n=4^{2n+2}-15n-16$ يقبل القسمة على 225 أي $A_n=4^{2n+2}-15n-16=15k$ مع $k\in\mathbb{N}$ (معطيات الترجع) .

- نبين أن العلاقة A_n صحيحة لـ $n+1$:

أي نبين أن : $A_{n+1}=4^{2(n+1)+2}-15(n+1)-16$

$$A_{n+1}=4^{2(n+1)+2}-15(n+1)-16$$
$$A_{n+1}=4^{2n+2}\times4^2-15n-15-16$$
$$A_{n+1}=4^{2n+2}\times(15+1)-15n-15-16$$
$$A_{n+1}=\left(4^{2n+2}\times1-15n-16\right)+4^{2n+2}\times15-15$$
$$A_{n+1}=\underbrace{\left(4^{2n+2}-15n-16\right)}_{15k}+15\times\left(4^{2n+2}-1\right)$$

ومنه : $A_{n+1}=\underbrace{\left(4^{2n+2}-15n-16\right)}_{\text{donnée recu.}}+15\times\left(4^{2n+2}-1\right)$: (1)

ومنه نثبت بالترجع أن: $B_n=4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15 .

نتحقق أن العلاقة B_n صحيحة ل $n=0$:

لدينا: $B_n = 4^{2n+2}-1$

أي: $B_0 = 4^{2\times 0+2}-1=15$

وبالتالي: العلاقة B_n صحيحة ل $n=0$.

نفترض أن العلاقة B_n صحيحة إلى n :

أي أن: العدد $B_n = 4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15 أي $B_n = 4^{2n+2}-1=15k'$ مع $k\in\mathbb{N}$ (معطيات الترجع) .

نبين أن العلاقة B_n صحيحة ل $n+1$:

أي نبين أن : $B_{n+1} = 4^{2(n+1)+2}-1$

$$B_{n+1} = 4^{2(n+1)+2}-1$$
$$B_{n+1} = 4^{2n+2}\times 4^2-1$$
$$B_{n+1} = 4^{2n+2}\times(15+1)-1$$
$$B_{n+1} = 4^{2n+2}\times 15+\underbrace{4^{2n+2}-1}_{15k'}$$
$$B_{n+1} = 15\left[4^{2n+2}+k'\right]$$

ومنه: B_{n+1} يقبل القسمة على 15 : (2)

حسب (1) و (2) إذن : A_{n+1} يقبل القسمة على 15

خلاصة: العدد $A_n = 4^{2n+2}-15n-16$ يقبل القسمة على 225

هناك طريقة ثانية

.04

1. نكتب بالتفصيل :

$$1\le 3n\le 9 \Rightarrow \frac{1}{3}\le n\le 3$$

ومنه: $n\in\{1,2,3\}$

حالة أولى: $n=1$ و نعلم أن: $1\le p\le 3n$

إذن: $1\le p\le 3\times 1$

ومنه: $1\le p\le 3$

وبالتالي : $p\in\{1,2,3\}$

- نأخذ: $n=1$ و $p\in\{1,2,3\}$ إذن: $r\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$

حالة ثانية: $n=2$ و نعلم أن: $1\le p\le 3n$

إذن: $1\le p\le 3\times 2$

ومنه: $1\le p\le 6$

وبالتالي : $p\in\{1,2,3,4,5,6\}$

- نأخذ: $n=2$ و $p\in\{1,2,3,4,5,6\}$ إذن: $r\in\left\{2,1,\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right\}$

حالة ثالثة: $n=3$ و نعلم أن: $1\leq p\leq 3n$

إذن: $1\leq p\leq 3\times 3$

ومنه: $1\leq p\leq 9$

وبالتالي : $p\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

- نأخذ: $n=3$ و $p\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ إذن: $r\in\left\{3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{3}{8},\frac{1}{3}\right\}$

خلاصة : $F=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},\frac{2}{5},2,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{7},\frac{3}{8},3\right\}$

.2

أ- نبين أن : $(A\cap B)\setminus(A\cap C)=A\cap(B\setminus C)$

$$\begin{aligned}(A\cap B)\setminus(A\cap C)&=(A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)}\\&=A\cap B\cap\overline{A\cap C}\\&=A\cap\overline{A\cap C}\cap B\\&=\left(A\cap\overline{A\cap C}\right)\cap B\\&=\left(A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)\right)\cap B\\&=\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right)\right)\cap B\\&=\left(\varnothing\cup\left(A\cap\overline{C}\right)\right)\cap B\\&=\left(A\cap\overline{C}\right)\cap B\\&=A\cap\overline{C}\cap B\\&=A\cap B\cap\overline{C}\\&=A\cap\left(B\cap\overline{C}\right)\\&=A\cap(B\setminus C)\end{aligned}$$

خلاصة : $(A\cap B)\setminus(A\cap C)=A\cap(B\setminus C)$

ب- نبين أن : $(B\setminus C\subset A$ و $C\setminus D\subset A)\Rightarrow B\setminus D\subset A$

ليكن $x\in B\setminus D$ نبين أن : $x\in A$.

$x\in B\setminus D$ إذن: $x\notin D$ و $x\in B$.

حالة أولى: $x\in C$

لدينا: $x\notin D$ و $x\in C$ إذن : $x\in C\setminus D$ ومنه : $x\in A$ (لأن $C\setminus D\subset A$)

خلاصة 1: $B\setminus D\subset A$.

حالة ثانية : $x\notin C$

لدينا: $x\in B$ و $x\notin C$ إذن : $x\in B\setminus C$ ومنه : $x\in A$ (لأن $B\setminus C\subset A$)

خلاصة 2: $B\setminus D\subset A$.

في كلتا الحالتين : $B\setminus D\subset A$

خلاصة : $\left(B\setminus C\subset A \text{ و } C\setminus D\subset A\right)\Rightarrow B\setminus D\subset A$

05.

1. نبين أن : $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

لكي نبين: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ يجب أن نبين العلاقة تالية صحيحة : $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$$

ومنه العلاقة صحيحة

- نأخذ: $x=a$ و $y=b$ إذن: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$
- نأخذ: $x=b$ و $y=c$ إذن: $b+c\geq 2\sqrt{bc}$
- نأخذ: $x=c$ و $y=a$ إذن: $a+c\geq 2\sqrt{ac}$

ومنه ضرب جميع الأطراف :

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{bc}\times 2\sqrt{ac}\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$$

وبالتالي: $(a+b)\times(b+c)\times(c+a)\geq 8abc$

خلاصة: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

06.

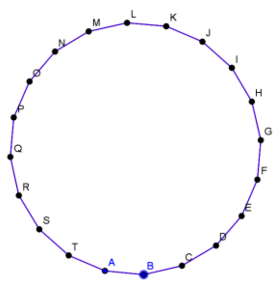
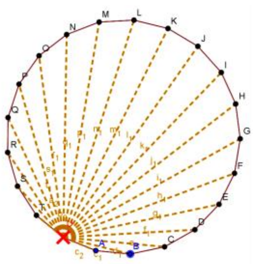
1. عدد أقطار المضلعات :

الشكل الأول : $d_4=2$ الشكل الثاني : $d_5=5$ الشكل الثالث : $d_6=9$

2. الصيغة التحقق الجواب عن السؤال الأول هي : الصيغة الثانية : $(2)\ :\ d_{n+1}=n-1+d_n$

3. نبين بالترجع :

نبين بالترجع أن عدد أقطار مضلع محدب حيث عدد رؤوسه n هو $d_n=\dfrac{n\times(n-3)}{2}$:

مضلع محدب عدد رؤوسه n	مضلع محدب عدد رؤوسه $n+1$
	

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=4$:

لدينا : $d_n=\dfrac{n\times(n-3)}{2}$

أي : $d_4=\dfrac{4\times(4-3)}{2}=2$

وبالتالي: العلاقة صحيحة ل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n :

أي أن: $d_n=\dfrac{n\times(n-3)}{2}$ (معطيات الترجع) .

- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$:

أي نبين أن : $d_{n+1}=\dfrac{(n+1)\times(n-2)}{2}$

الطريقة 1 :

حسب السؤال السابق : لدين العلاقة $d_{n+1}=n-1+d_n$: (2)

إذن :

$$d_{n+1}=n-1+d_n$$

$$=n-1+\frac{n(n-3)}{2} \quad \text{(حسب معطيات الترجع)}$$

$$=\frac{2n-2+n(n-3)}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}=\frac{n^2-1-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n-1-1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

الطريق 2 :

عندما المضلع P_n نضيف له رأس A_{n+1} نحصل على مضلع محدب P_{n+1} له $n+1$ رأس

لدينا : n رأس سابقة (مضلع محدب عدد رؤوسه n) تعطي لنا $d_n=\dfrac{n\times(n-3)}{2}$ قطر حسب معطيات الترجع . أما الرأس الذي أضفناه سيرتبط بالرؤوس n السابقة بقطع عددها n قطعة حيث 2 ليست بقطر إذن عدد الأقطار التي أضيفت هي : $n-2$ و لا ننسى القطعة التي أصبحت قطر والتي كانت تربط الرأسين التي أضفنا بينهما الرأس A_{n+1} وبالتالي عدد الأقطار التي أضفت هو $n-2+1=n-1$ و منه عدد الأقطار للمضلع المحدب P_{n+1} هو سيكون : d_n+n-1 ومنه :

$$d_{n+1}=d_n+n-1=\frac{n\times(n-3)}{2}+n-1=\frac{n^2-3n+2n-2}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}$$

$$=\frac{(n+1)\times(n-2)}{2}$$

ومنه : $d_{n+1}=\dfrac{(n+1)\times(n-2)}{2}$

وبالتالي العلاقة صحيحة ل $n+1$

خلاصة: عدد أقطار مضلع محدب حيث عدد رؤوسه n هو $d_n=\dfrac{n\times(n-3)}{2}$.