السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز 3 ساعات

تمرين 1 :

1

$$\neg(P_1): \exists(x,y)\in IR^2 \quad x^2+y^2=1 \text{ و } |x\,y|>\frac{1}{2}$$

$$\neg(P_2): \forall a\in IN\ \exists x\in Q \quad x^2\le a$$

$$\neg(P_3): \exists n\in IN \quad (n+n^{2013}) \text{ est un nombre impaire}$$

$$\neg(P_4): \exists n\in IN^*\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}\ge 2\sqrt{n}$$

$$\neg(P_5): \exists y\in IR\ \forall x\in IR \quad x^2-yx+1\ne 0$$

2

- بأخذنا : $x=0$ نجد أن نفي العبارة (P_2) صحيحة لأن : $\forall a\in IN\ a\ge 0=0^2$ ، بمعنى أن (P_2) عبارة خاطئة
- لنبين أن العبارة (P_3) صحيحة، و ذلك باستعمال البرهان بفصل الحلات.

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا :

إذا كان n عددا زوجيا فإن: n^{2013} عدد زوجي منه $n+n^{2013}$ عدد زوجي

إذا كان n عددا فرديا فإن: n^{2013} عدد فردي منه $n+n^{2013}$ عدد زوجي

بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي n $n+n^{2013}$ عدد زوجي

3

- لدينا لكل $(x,y)\in IR^2$:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2|x\,y|=1-2|xy| \Rightarrow (|x|-|y|)^2=1-2|x\,y| \Rightarrow 1-2|x\,y|\ge 0 \Rightarrow |x\,y|\le\frac{1}{2}$$

بالتالي العبارة (P_1) صحيحة

- لنبرهن بالترجع على صحة العبارة (P_4)

بالنسبة لـ $n=1$ لدينا: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}=1$ و $2\sqrt{n}=2$ إذن العبارة صحيحة $(1<2)$

نفترض أن $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ ونبين أن : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$

لدينا:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{\sqrt{4n^2+4n}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{\sqrt{4n^2+4n+1}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{2n+1+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$$

و هذا ينهي البرهان.

- لنبرهن على خطأ العبارة (P_5) أي لنبرهن على صحة نفيها.

نعتبر المعادلة $x^2 - yx + 1 = 0$ ذات المجهول x ، لدينا : $\Delta = x^2 - 4$

إذن بأخذنا : $y = 0$ فإننا نجد أن $\Delta < 0$ أي أن هذه المعادلة ($x^2 + 1 = 0$) لا تقبل حلولا في IR

بمعنى : $\forall x \in IR \quad x^2 + 1 \neq 0$ مما يؤكد صحة نفي العبارة (P_5)، بالتالي فـ (P_5) عبارة خاطئة.

تمرين 2 :

1

نفترض أن: $\sqrt{2} \in Q$ إذن : $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \quad \exists (a,b) \in IN \times IN^*$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ un nombre paire} \Rightarrow a \text{ un nombre paire}$$

منه:

$$\Rightarrow \exists k \in IN / a = 2k \Rightarrow 2b^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \text{ un nombre paire} \Rightarrow b \text{ un nombre paire}$$

نستنتج إذن أن 2 قاسم مشترك لـ a و b وهذا يناقض $a \wedge b = 1$

إذن الافتراض خاطئ و منه: $\sqrt{2} \notin Q$

نضع: $\alpha = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ نفترض أن: $\alpha \in Q$، منه: $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases} \quad \exists (a,b) \in IN \times IN^*$

لدينا: $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{7}}{8 - 7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$

منه: $\dfrac{1}{\alpha} + \alpha = 4\sqrt{2}$ منه: $\dfrac{1}{4\alpha} + \dfrac{\alpha}{4} = \sqrt{2}$ منه: $\dfrac{b}{4a} + \dfrac{a}{4b} = \sqrt{2}$ منه : $\dfrac{b^2 + a^2}{4ab} = \sqrt{2}$ منه $\sqrt{2} \in Q$

و هذا غير ممكن حسب النتيجة السابقة.

2

لدينا لكل $(x,y) \in Q^2$

- من جهة : $x = y = 0 \Rightarrow x + y\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2} = 0$
- و من جهة أخرى نبين أن: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

لدينا: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -y\sqrt{2}$

نستنتج إذن أن : x و y منعدمان معا أو غير منعدمين معا

إذا افترضنا أنهما غير منعدمين معا فسنستنتج أن : $\sqrt{2} = \dfrac{-x}{y}$ و بما أن خارج عددين جذريين غير منعدمين هو عدد جذري ، فسنستنتج أن : $\sqrt{2} \in Q$ و هذا غير ممكن حسب السؤال السابق

إذن نستنتج أن x و y منعدمان معا، منه: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

3	لدينا، لكل $(x,y)\in IR^2$: $x+y+1=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}\right)\Rightarrow x+y+1=2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y-1}=0$ $\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+y-1-2\sqrt{y-1}+1=0\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2=0$ $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\\sqrt{y-1}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\\sqrt{y-1}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$	
4	بالنسبة لـ $n=0$ العبارة المطلوبة صحيحة لأن 0 مضاعف للعدد 6 نفترض أن $n(n^2+5)$ مضاعف لـ 6 ونبرهن أن $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ مضاعف لـ 6 لدينا: $n(n^2+5)$ مضاعف لـ 6، إذن: $\exists k\in IN\ /\ n(n^2+5)=6k$ ولدينا: $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)=(n+1)(n^2+2n+6)=n^3+2n^2+6n+n^2+2n+6=n^3+3n^2+8n+6$ $=n^3+5n+3n^2+3n+6=6k+3n(n+1)+6$ وبما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي) فإن: $\exists p\in IN\ /\ n(n+1)=2p$ منه: $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)=6k+6p+6=6(k+p+1)$ وبما أن: $k+p+1\in IN$ فإن $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ مضاعف لـ 6	

تمرين 3 :

1	في المجال : $I=[-1;1]$ لدينا: $x^2-1\le 0$ ومنه: $\left\|x^2-1\right\|+2x-3=0\Leftrightarrow 1-x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x^2-2x+2=0$ وبما أن: $\Delta=4-8=-4<0$ فإن: $S_1=\phi$ وفي المجال : $J=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $x^2-1>0$ ومنه: $\left\|x^2-1\right\|+2x-3=0\Leftrightarrow x^2-1+2x-3=0\Leftrightarrow x^2+2x-4=0$ وبما أن: $\Delta=4+16=20$ فإن: $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{20}}{2}=-1+\sqrt{5}\in J$ و $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}\in J$ $S_2=\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\}$، خلاصة: $S=S_1\cup S_2=\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\}$	
2	$D=\{x\in IR/\ 3x-6\ge 0\ et\ \ x-1\ge 0\}=\{x\in IR/\ x\ge 2\ et\ \ x\ge 1\}=[2;+\infty[$ إذن لكل $x\in[2;+\infty[$ لدينا: $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\le 1\Leftrightarrow\sqrt{3x-6}\le 1+\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\sqrt{3x-6}^2\le\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2\Leftrightarrow 3x-6\le 1+2\sqrt{x-1}+x-1$ $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\le 1\Leftrightarrow 2x-6\le 2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x-3\le\sqrt{x-1}$ إذا كان : $x-3\le 0$ أي $2\le x\le 3$ فالمتراجحة صحيحة ، منه: $S_1=[2;3]$ إذا كان $x-3>0$ فإن: $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\le 1\Leftrightarrow x^2-6x+9\le x-1\Leftrightarrow x^2-7x+10\le 0$ $\Delta=49-40=9$، بعد إنشاء جدول الإشارات نجد أن: $S_2=[2;5]\cap]3;+\infty[=]3;5]$ خلاصة: $S=S_1\cup S_2=[2;5]$	
3	لدينا: $\begin{cases}2x+3y=-1\\\|x+y\|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-1\\x+y=1\ \ ou\ \ x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-1\\x+y=1\end{cases}\ ou\ \begin{cases}2x+3y=-1\\x+y=-1\end{cases}$ وباستعمال المحددة أو طريقة التعويض أو التأليفة الخطية نجد: $\begin{cases}2x+3y=-1\\\|x+y\|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}\ ou\ \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ بالتالي: $S=\{(4;3\ );(-2;1)\}$	

4

لدينا:

$$\forall a>0 \quad \forall b>0 \quad \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)-4=ab+1+1+\frac{1}{ab}-4=ab-2+\frac{1}{ab}=\frac{(ab)^2-2ab+1}{ab}=\frac{(ab-1)^2}{ab}\geq 0$$

بالتالي: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4 \quad \forall a>0 \quad \forall b>0$

تمرين 4 : نفترض أن الحدودية : $p(x)=x^3+ax+b$ تقبل على الأقل حلا جذريا

إذن: $\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right)^3+a\left(\frac{p}{q}\right)+b=0\\ p\wedge q=1\end{cases} \quad / \quad \exists(p,q)\in Z\times IN^*$ منه: $p^3+apq^2+bq^3=0$

بما أن : $p\wedge q=1$ فإن p و q فرديان معا أو أحدهما فري و الأخر زوجي

إذا كانا فرديان معا فإن: p^3 و apq^2 و bq^3 أعداد فردية مجموعها فردي

إذا كان أحدهما زوجي و الآخر فردي (و بدراسة الحالتين معا) نجد أن apq^2 عدد زوجي و p^3+bq^3 عدد فردي

في كل الحلات نجد أن $p^3+apq^2+bq^3$ عدد فردي و هذا غير ممكن لأن الصفر عدد زوجي

تمرين 5 :

لدينا a و b و c تمثل أطوال أضلاع مثلث إذن: $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ و $a+b>c$ و $a+c>b$ و $b+c>a$

منه : $\frac{1}{a+b}>0$ و $\frac{1}{b+c}>0$ و $\frac{1}{c+a}>0$

و $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{b+c+b+c}\geq\frac{2}{2(b+c)}\geq\frac{1}{b+c}$

لأن: $a+b<a+b+c$ و $a+c<a+b+c$ و $a<b+c$)

و بنفس الطريقة نبين أن: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b}$ ، و هذا ينهي البرهان.

هذا الفرض المقترح يتضمن تمارين أكثر من التمارين المفترضة في فرض فعلي كما و كيفا (من حيث الصعوبة)، لذلك اقترحت 3 ساعات كوقت افتراضي لإنجازه، الهدف من ذلك التعود على مثل هذه الوضعيات و أيضا محاولة الإحاطة بجل مفاهيم الدرس الواجب الالمام بها.

عدم التمكن من إنجاز بعض أو جل هذه التمارين لا يعني مطلقا ضعفا أو نقصا في المستوى لكنه يعني ضرورة تكثيف الجهد و استثمار الحلول المقترحة في حل وضعيات مشابهة.