التصحيح من طرف ملحاوي ف. الزهراء و بوسدرة زكرياء ثانوية عمر بن عبد العزيز

سلسلة رقم 3

تمارين : عموميات حول الدوال العددية

01.

أ) لدينا : f دالة فردية

إذن : $\forall x \in D_f , -x \in D_f$ ومنه : $[-13,-2[\subset D_f$

ولدينا : $\forall x \in D_f : f(-x)=f(x)$

إذن : $\begin{cases} f(-3)=-f(3)=4 \\ f(-4)=-f(4)=-3 \\ f(-8)=-f(8)=0 \\ f(-13)=-f(13)=-5 \end{cases}$

بما أن الدالة فردية فإنها تحافظ على الرتابة.

إذن جدول تغيرات f يكون كالتالي :

x	−13		−8		−4		−3		−2 ‖ 2		3		4		8		13
f(x)	−5	↗	0	↘	−3	↗	4	↘	‖	↘	−4	↗	3	↘	0	↗	5

ب) لدينا : f دالة زوجية

إذن : $\forall x \in D_f , -x \in D_f$

ومنه : $[-8,-4[\cup]-4,-2[\subset D_f$

ولدينا : $\forall x \in D_f : f(-x)=f(x)$

إذن : $\begin{cases} f(-3)=f(3)=4 \\ f(-6)=f(6)=-2 \\ f(-8)=f(8)=-7 \end{cases}$

وبما أن الدالة زوجية فإن الرتابة تتغير.

يكون جدول التغيرات كالتالي :

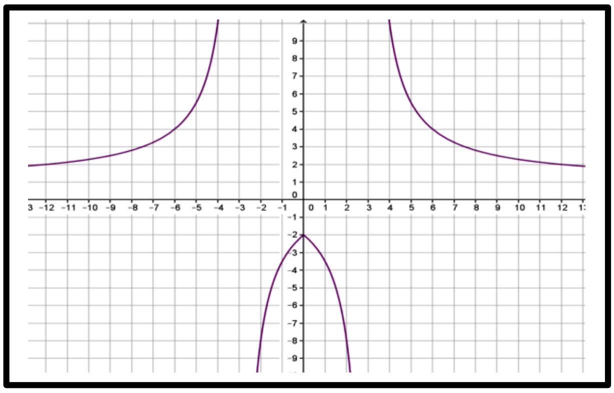
x	−13	−8			−4		−3		−2 ‖ 2		3		4		6		8
f(x)	−7	↗	−2	↘	‖	↘	4	↗	‖	↘	4	↗	‖	↗	−2	↘	−7

02.

أ- نتمم انشاء منحنى f علما انها زوجية

بما أن الدالة f زوجية على D_f

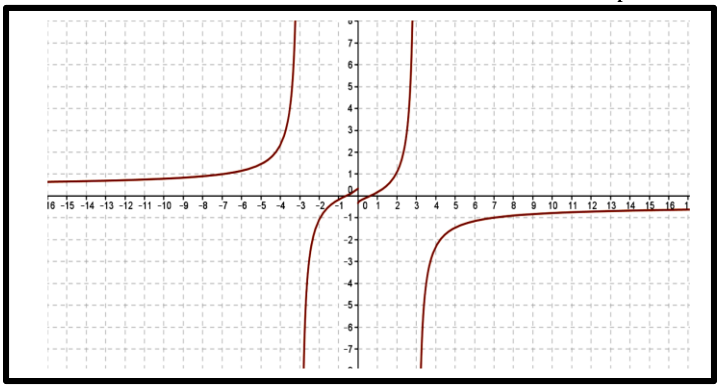
فإن المنحنى C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب ومنه :



ب- نتمم انشاء منحنى f علما انها فردية

بما أن الدالة f فردية على D_f

فإن المنحنى C_f متماثل بالنسبة لأصل المعلم ومنه :



.03

نتمم انشاء منحنى f علما انها دورية و دورها $T=2\pi$

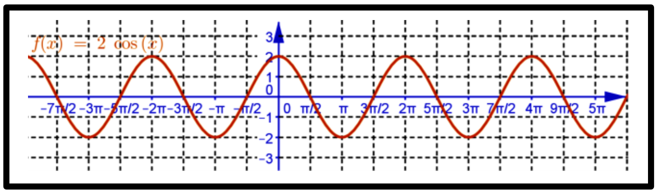
لدينا f دورية ودورها $T=2\pi$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+T)=f(x)$

أي : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+2\pi)=f(x)$

مثال : $f(2\pi)=f(0)=2$ و $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

إنشاء الدالة :



ملاحظة : الشكل يتعلق بالدالة : $f(x)=2\cos(x)$

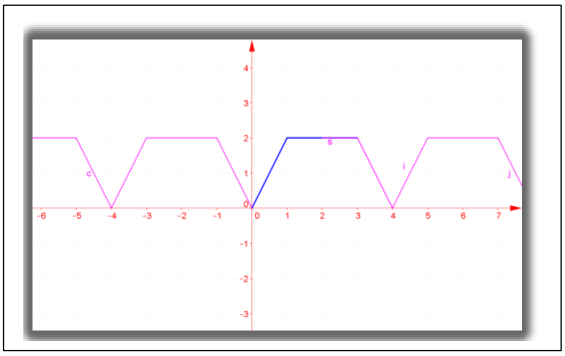
.04

نتمم انشاء منحنى f علما انها دورية و دورها $T=4$

لدينا f دالة زوجية ودورية دورها : $T=4$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)=f(x)$ و : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+4)=f(x)$

ومنه يمكن استخراج المنحنى : C_f



ملاحظة : الشكل يتعلق بالدالة : $f(x)=\begin{cases}2x : x\in\left]0,1\right[\\ 2 : x\in\left]1,3\right[\\ -2x+8 : x\in\left]3,4\right[\\ \dots\end{cases}$

.05

1. نحدد مبيانيا D_f و D_g. لدينا مبيانيا $D_f=\mathbb{R}^*$ و $D_g=\mathbb{R}^*$

نحل مبيانيا المتراجحة $x\in\mathbb{R}; f(x)\geq 0$

يكون المنحنى C_f فوق محور الأفاصيل $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[\cup\{-2\}$

2. نحدد مجموعة تعريف الدالة : $h(x)=\sqrt{f(x)}$

لدينا : $f(x)\geq 0$

و : $x\in D_h \Leftrightarrow x\in D_f$ و $f(x)\geq 0$

$x\in D_h \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*$ و $x\in\left]0,+\infty\right[\cup\{-2\}$

$x\in D_h \Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[\cup\{-2\}$

خلاصة : $D_h=\left]0,+\infty\right[\cup\{-2\}$

3. تحديد مجموعة تعريف الدالة : $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

لدينا : $x\in D_k \Leftrightarrow x\in D_f$ و $x\notin\{-2,2\}$

$x\in D_k \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*$ و $x\notin\{-2,2\}$

$x \in D_k \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-2,2\}$

خلاصة : $D_k = x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-2,2\}$

4. نحل مبيانيا المتراجحة : $g(x) \le 0$

أي أن المنحنى C_g تحت محور الأفاصيل. ومنه : $g(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[$

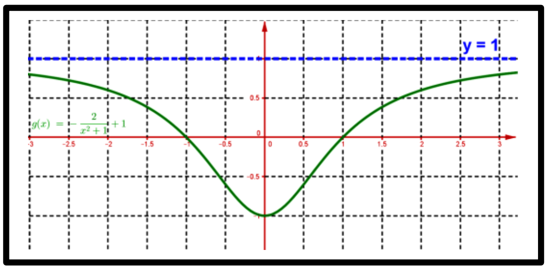
- نحل مبيانيا المتراجحة : $f(x) > g(x)$

حل المتراجحة $f(x) > g(x)$ مبيانيا هو المنحنى C_f يكون قطعا فوق المنحنى C_g

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-3,0[\cup]3,+\infty[$

خلاصة : $S =]-3,0[\cup]3,+\infty[$

.06



1. مبيانيا نجد :

f مكبورة ب 1 و f مصغورة ب -1 إذن f محدودة

2. نبرهن على ذلك :

- f مكبورة ب 1 :

$$f(x)-1 = \frac{-2}{x^2+1}+1-1$$
$$= \frac{-2}{x^2+1} < 0$$

ومنه : $f(x)-1<0$ وبالتالي : $f(x)<1$

خلاصة : $f(x)$ مكبورة ب 1

تذكير : $\frac{a}{b}=0$ إذا كان $a=0$

- f مصغورة ب -1 :

$$f(x)-(-1) = f(x)+1$$
$$= \frac{-2}{x^2+1}+1+1$$
$$= \frac{2x^2}{x^2+1} \ge -1$$

ومنه : $f(x) \ge -1$ وبالتالي : f مصغورة ب -1

- f محدودة ب 1 و -1 :

بما أن f مكبورة ب 1 و مصغورة ب -1 فإن f محدودة ب 1 و -1.

.07

1. ندرس زوجية f على $\mathbb{R}$

* **تحديد D_f :**

لدينا : $x^2+|x| \ge 0$ إذن : $x^2+|x|+1 \ge 1$

ومنه : $x^2+|x|+1 \ne 0$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R}$

*** ندرس زوجية f على $\mathbb{R}$:**

- نعلم أن لكل $x \in \mathbb{R}$ كذلك $-x \in \mathbb{R}$

* ليكن $x \in \mathbb{R}$ $D_E =]2,13]$

لدينا :
$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + |-x| + 1}$$
$$= -\frac{x}{(x)^2 + |x| + 1}$$

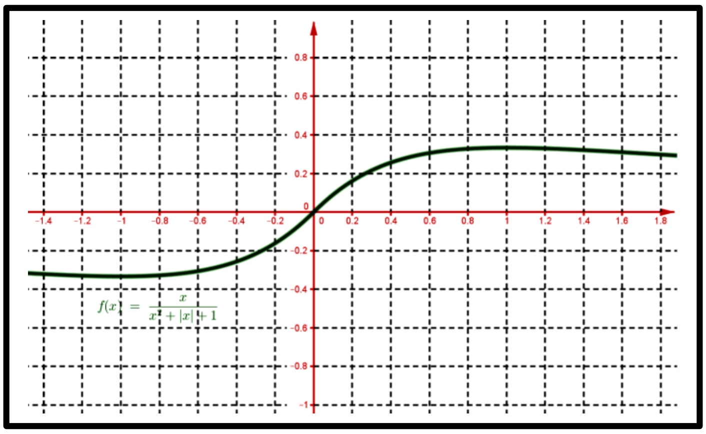
وبالتالي : $f(-x) = -f(x)$

خلاصة : f فردية على $\mathbb{R}$ $D_E =]2,13]$

.2 نبين أن f تقبل قيمة قصوية عند 1 على $\mathbb{R}^+$:

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$

لدينا :
$$f(x) - f(1) = \frac{x}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{3x - x^2 - x - 1}{3(x^2 + x + 1)}$$
$$= \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{3(x^2 + x + 1)}$$
$$= -\frac{(x-1)^2}{3(x^2 + x + 1)} \leq 0$$



$$f(x) - f(1) \leq 0$$

وبالتالي : $f(x) \leq f(1)$

خلاصة : f تقبل قيمة قصوى عند 1 على $\mathbb{R}^+$

.3 نستنتج أن f تقبل قيمة دنوية على $\mathbb{R}^-$:

ليكن $x \in \mathbb{R}^-$ ومنه $-x \in \mathbb{R}^+$

لدينا : $f(x) = -f(-x)$ (لأن : f فردية)

ونعلم أن : $f(-x) \leq f(1)$ (لأن : $-x \in \mathbb{R}^+$)

و :
$$\begin{cases} -f(-x) \geq -f(1) \\ f(x) \geq -f(1) \end{cases}$$

ومنه : $f(x) \geq f(-1)$ (لأن : $f(-1) = -f(1)$)

وبالتالي : f تقبل قيمة دنوية عند -1 على $\mathbb{R}^-$.

.08

.1 نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq 3E(2x) - 2E(3x) \leq 1$

لدينا :
$$2x - 1 < E(2x) \leq 2x$$
$$3(2x-1) < 3E(2x) \leq 6x$$

❶ $$6x - 3 < 3E(2x) \leq 6x$$

ولدينا :
$$3x - 1 < E(3x) \leq 3x$$
$$6x - 2 < 2E(3x) \leq 6x$$

❷ $-6x \le -2E(3x) < 2-6x$

من ❶ و ❷ : $-3 < 3E(2x)-2E(3x) < 2$

لدينا : $E(2x)$ و $E(3x)$ ينتميان إلى : $\mathbb{Z}$

إذن : $3E(2x)-2E(3x) \in \mathbb{Z}$

ومنه : $-2 \le 3E(2x)-2E(3x) \le 1$

خلاصة : $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \le 3E(2x)-2E(3x) \le 1$

.2 دور الدالة : $\sin^2(x)$

ليكن T دور الدالة $\sin^2(x)$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2(x+T) = \sin^2(x)$ (*)

أي : $\begin{cases} \sin(x+T) = \sin(x) \\ \sin(x+T) = -\sin(x) \end{cases}$ أو

إذن : $\exists k \in \mathbb{Z} \; ; \; x+T = x+2k\pi$

أو : $x+T = x+k\pi$

بما أن T هو أصغر عدد يحقق الخاصية (*) فإن : $T=\pi$

دور الدالة : $\sin(3x)+\cos(2x)$

ليكن : $f(x)=\sin(3x)$ و T دورها

و $h(x)=\cos(2x)$ و T' دورها

T يحقق العلاقة $\cos\big(2(x+T)\big)=\cos(2x)$

أي : $\cos\big(2x+2T\big)=\cos(2x)$

إذن : $2T=2\pi$ ومنه : $T=\pi$

T' يحقق العلاقة $\sin(3x+3T')=\sin(3x)$

إذن : $3T'=2\pi$ ومنه : $T'=\dfrac{2\pi}{3}$

دور الدالة $f+h$ هو أصغر مضاعف مشترك للعددين T و T' أي هو : 2π

ومنه : دور الدالة $\sin(3x)+\cos(2x)$ هو 2π

.3 أ) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) \le x \le E(x)+1$

إذن : $x-E(x) \ge 0$

و : $x-E(x) \le 1$

ومنه فإن : $0 \le f(x) = x-E(x) \le 1$

ب) ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)-E(x+1) \\ &= x+1-E(x)-1 \\ &= x-E(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

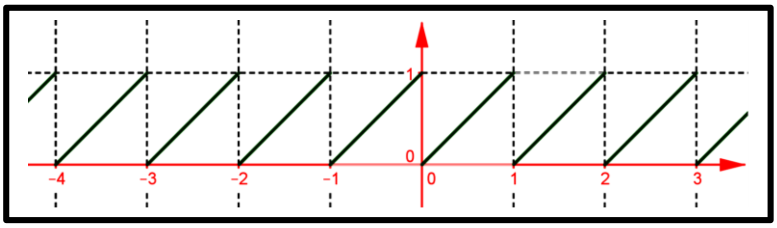
إذن فإن f دورية ودورها 1

ج- ليكن $x \in [0,1[$

$E(x)=0$

ومنه : $f(x)=x$

- منحنى f :



.09

.1 نحدد مجموعة تعريف الدالة : $f(x)=\frac{-3}{\sqrt{5-2x}}+2$

لدينا :

$$x\in D_f \Leftrightarrow \sqrt{5-2x}$$
$$\Leftrightarrow 5-2x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x\neq \frac{5}{2}$$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

.2 ندرس رتابة f على D_f

ليكن $x,x'\in D_f$ حيث : $x>x'$.

لدينا : $x>x'\Rightarrow 5-2x<5-2x'$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5-2x}}>\frac{1}{\sqrt{5-2x'}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5-2x}}>\frac{1}{\sqrt{5-2x'}}$$
$$\Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{5-2x}}<\frac{-3}{\sqrt{5-2x'}}$$
$$\Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{5-2x}}+2<\frac{-3}{\sqrt{5-2x'}}+2$$
$$\Rightarrow f(x)<f(x)$$

f تناقصية قطعا على D_f

خلاصة : f تناقصية قطعا على D_f

.10

.1 ليكن : $x\in\mathbb{R}$

$$|f(x)|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|$$

نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}: x^2+1\geq 2x$ إذن : $\forall x\in\mathbb{R}:\left|x^2+1\right|\geq|2x|$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}:\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}:|f(x)|\leq 1$

.2 زوجية f :

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R},-x\in\mathbb{R}$

ليكن : $x\in\mathbb{R}$ لدينا : $f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1}=-f(x)$

إذن : f دالة فردية

.3 نبين :

ليكن : $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2y}{y^2+1}=\frac{2x\left(y^2+1\right)-2y\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\frac{2xy(y-x)-2(x+y)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\frac{2xy(y-x)-2(x+y)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$$

$$=\frac{2(1-xy)(x-y)}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$$

.4 نستنتج رتابة f

ليكن : $x,y\in[1,+\infty[$ و : $x\le y$

إذن : $xy\ge 1$ و $1-xy\le 0$ و $x-y\le 0$

إذن : $f(x)-f(y)\ge 0$

ومنه : f تناقصية على $[1,+\infty[$

- ليكن : $x,y\in[0,1]$ و $x\le y$

إذن : $\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$

إذن : $xy\le 1$

ومنه : $1-xy\ge 0$

ولدينا : $x-y\le 0$

إذن : $f(x)-f(y)\le 0$

ومنه : f تزايدية على $[0,1]$

جدول تغيرات f على D_E : $f(0)=0$ ، $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
f(x)	0	↗	1	↘	

بما أن الدالة فردية يمكن استنتاج حلول تغيرات الدالة لان منحناها متماثل بالنسبة لأصل المعلم

ومنه :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)		↘	-1	↗	0	↗	1	↘	

.5 أ) تحديد مجموعة التعريف D_g

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_g \Leftrightarrow x+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x\ge 1$$

إذن : $D_g=[-1,+\infty[$

رتابة g :

ليكن : $x,x'\in D_g$ حيث : $x>x'$.

لدينا :

$x > x' \Rightarrow x+1 > x'+1$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} > \sqrt{x'+1}$

$\Rightarrow f(x) > f(x')$

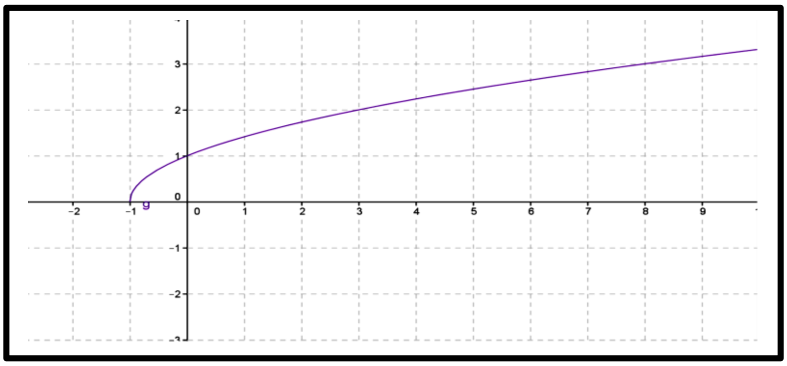
و منه : g على تزايدية قطعا D_g.

خلاصة : g تزايدية قطعا على D_g.

جدول تغيرات g

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	1	↗

ب) مبيانيا :



صورة المجال $[-1,0]$ هو المجال $[0,1]$

إذن : $g([-1,0]) = [0,1]$

صورة المجال $[0,+\infty[$ هو المجال $[1,+\infty[$

إذن : $g([0,+\infty[) = [1,+\infty[$

ج) نتحقق:

ليكن : $x \in \mathbb{R}$

g معرفة على $[-1,+\infty[$ ولدينا : $f([-1,+\infty[) = [-1,+\infty[$

إذن : $\forall x \in [-1,+\infty[\; : \; g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}+1} = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}} = \dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} = h(x)$

د) جدول تغيرات h :

* **على المجال $[-1,1]$** . لدينا f تزايدية على $[-1,1]$ و $f([-1,1]) = [-1,1]$ و الدالة g تزايدية على $[-1,1]$ ومنه الدالة $h(x) = g \circ f(x)$ تزايدية على $[-1,1]$.

* **على المجال $[1,+\infty[$** . لدينا f تناقصية على $[1,+\infty[$ و $f([1,+\infty[) \subset [-1,1]$ (حسب $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \le 1$) و الدالة g تزايدية على $[-1,1]$ ومنه الدالة $h(x) = g \circ f(x)$ تناقصية على $[1,+\infty[$.

* **على المجال $]-\infty,-1]$** . لدينا f تناقصية على $]-\infty,-1]$ و $f(]-\infty,-1]) \subset [-1,1]$ (حسب $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \le 1$) و الدالة g تزايدية على $[-1,1]$ ومنه الدالة $h(x) = g \circ f(x)$ تناقصية على $]-\infty,-1]$.

ومنه جدول تغيرات الدالة h

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h(x)$	↘	0	↗ 1 ↗	$\sqrt{2}$	↘

11

1. بين أن : $f(0) = 0$.

لدينا : $f(0+0) = f(0) + f(0)$

إذن : $f(0)=2f(0)$

ومنه : $f(0)=0$

.2 نبين أن f دالة فردية : ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f=\mathbb{R}\Leftrightarrow -x\in D_f$

لدينا : $f(x-x)=f(x)+f(-x)$ و $f(x-x)=f(0)=0$ إذن : $f(x)+f(-x)=0$

إذن : $f(-x)=-f(x)$

ومنه : نستنتج أن f دالة فردية

.3 نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\,,\, f(nx)=nf(x)$

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $x\in\mathbb{R}$

لنبين بالترجع أن : $f(nx)=nf(x)$

من أجل $n=0$: $\forall x\in\mathbb{R}: f(0x)=f(0)=0=0f(x)$ صحيحة.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، لنبين أن $f\big((n+1)x\big)=(n+1)f(x)$

ليكن : $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f\big((n+1)x\big)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$

إذن فالعلاقة صحيحة من أجل $n+1$

ومنه حسب مبدأ الترجع فإن : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}: f(nx)=nf(x)$

.4 نستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}\,,\, f(n)=nf(1)$

حسب ما سبق لدينا : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}: f(nx)=nf(x)$

من أجل $x=1$ نستنتج : $\forall n\in\mathbb{N}: f(x)=nf(1)$

.5 نستنتج أن : $\forall p\in\mathbb{Z}\,,\, f(px)=pf(x)$

ليكن : $p\in\mathbb{Z}$

حالة 1 : اذا كان : $p\geq 0$ فإن : $p\in\mathbb{N}$ ومنه : $f(px)=pf(x)$

حالة 2 : اذا كان : $p\leq 0$ فإن : $-p\in\mathbb{N}$

ومنه :

$f(px)=f\big(-(-px)\big)$

$=-(f(-px))$ (لأن f فردية)

$=-\big(-pf(x)\big)$ (نستعمل الحالة 1 لأن $-p\in\mathbb{N}$)

$=pf(x)$

نستنتج إذن أن : $\forall p\in\mathbb{Z}: f(px)=pf(x)$

.12

.1 طبيعة المضلع

لدينا : $(AB)\perp(ME)$ و $(AB)\perp(AF)$ (لأن $(AB)\perp(AC)$) إذن : $(AC)\parallel(ME)$

ومنه المضلع EFAM شبه منحرف قائم الزاوية

.2 نحسب EM بدلالة x.

لنعتبر المثلث ABC و $(EM)//(AC)$

نطبق مبرهنة طاليس المباشرة $\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{x}{AB}=\dfrac{EM}{AC}$ ومنه : $EM=x \Rightarrow \dfrac{x}{AB}=\dfrac{EM}{AC}$ (لأن : $AC=AB$).

خلاصة : $EM=x$.

.3 مساحة EFAM بدلالة x.

لدينا : $S_{EFAM}=\dfrac{(EM+AF)AM}{2}=\dfrac{(x+\frac{5}{2})(5-x)}{2}=\dfrac{-2x^2+5x+25}{4}$

إذن : $S_{EFAM}=\dfrac{-2x^2+5x+25}{4}$.

نستنتج صيغة : $f(x)$ لدينا : $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{25}{4}$.

4. جدول تغيرات f :

لدينا : f على شكل $f(x)=ax^2+bx+c$ مع $=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{25}{4}$ $a=-\dfrac{1}{2}\ ;\ b=\dfrac{5}{4}\ ;\ c=\dfrac{25}{4}$

جدول تغيرات f لدينا :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\dfrac{225}{32}$	↘

نستنتج قيمة قصوية ل x :

من خلال جدول تغيرات f نستنتج أن قيمة قصوية ل x التي من اجلها تكون مساحة EFAM هي : $x=\dfrac{5}{4}$

تصحيح تمارين : عموميات حول الدوال العددية لسنة 2015/2014

من طرف التلميذ : زكرياء بوسدرة و التلميذة ملحاوي فاطمة الزهراء

بتاريخ : 2015-01-31 12:07