السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال العددية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1

$Dg=\{x\in IR / x+4\geq 0\}=\{x\in IR / x\geq -4\}=[-4;+\infty[$

$Dh=\{x\in IR / x^2+4x+5\geq 0\}$

$\Delta=16-20=-4<0$ ، منه : $Dh=IR$

2

لنبين أن : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$

لدينا : $\forall x\in IR \quad f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

بالتالي : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$

3

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$ ، إذن :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-3	↗	

g عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$ ، إذن :

x	$-\infty$	-4		$+\infty$
$g(x)$		0	↗	

4

لدينا : $\forall x\in IR \quad g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{x^2+4x+1+4}=\sqrt{x^2+4x+5}=h(x)$

5

رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$	رتابة الدالة h على $[-2;+\infty[$
▪ لدينا f تناقصية على $]-\infty;-2]$ ▪ لدينا $f(]-\infty;-2])=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$ ▪ لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$	▪ لدينا f تزايدية على $[-2;+\infty[$ ▪ لدينا $f([-2;+\infty[)=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$ ▪ لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$
إذن h تناقصية على $]-\infty;-2]$	إذن h تزايدية على $[-2;+\infty[$

لتحديد رتابة المركب $p\circ q(x)$ على مجال I ، نتبع 3 مراحل:

1) ندرس رتابة $q(x)$ على I 2) نحسب J صورة I بالدالة $q(x)$ 3) ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال J

و في الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقا من نتائج المرحلتين الأولى و الثالثة مثل قاعدة إشارة جداء

تمرين 2 : نعتبر الدوال $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=x^2$ و $h(x)=x^4-4x^2+3$

1

لدينا : $Dh=IR$ و $\forall x\in IR \quad h(-x)=h(x)$ إذن h دالة زوجية

2

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه

$\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ ، إذن :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه

$\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2}=0$ ، إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↗	

3

$\forall x \in IR \quad h(x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$

4

g تزايدية على $\left[0;\sqrt{2}\right]$ إذن : $g\left(\left[0;\sqrt{2}\right]\right) = \left[g(0); g(\sqrt{2})\right] = [0;2]$

g تزايدية على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ إذن : $g\left(\left[\sqrt{2};+\infty\right[\right) = \left[g(\sqrt{2});+\infty\right[= [2;+\infty[$

يمكن الاستعانة بجدول التغيرات مباشرة.

لدينا g تزايدية على $\left[0;\sqrt{2}\right]$ و $g\left(\left[0;\sqrt{2}\right]\right) = [0;2]$ و f تناقصية على $[0;2]$

إذن h تناقصية على $\left[0;\sqrt{2}\right]$

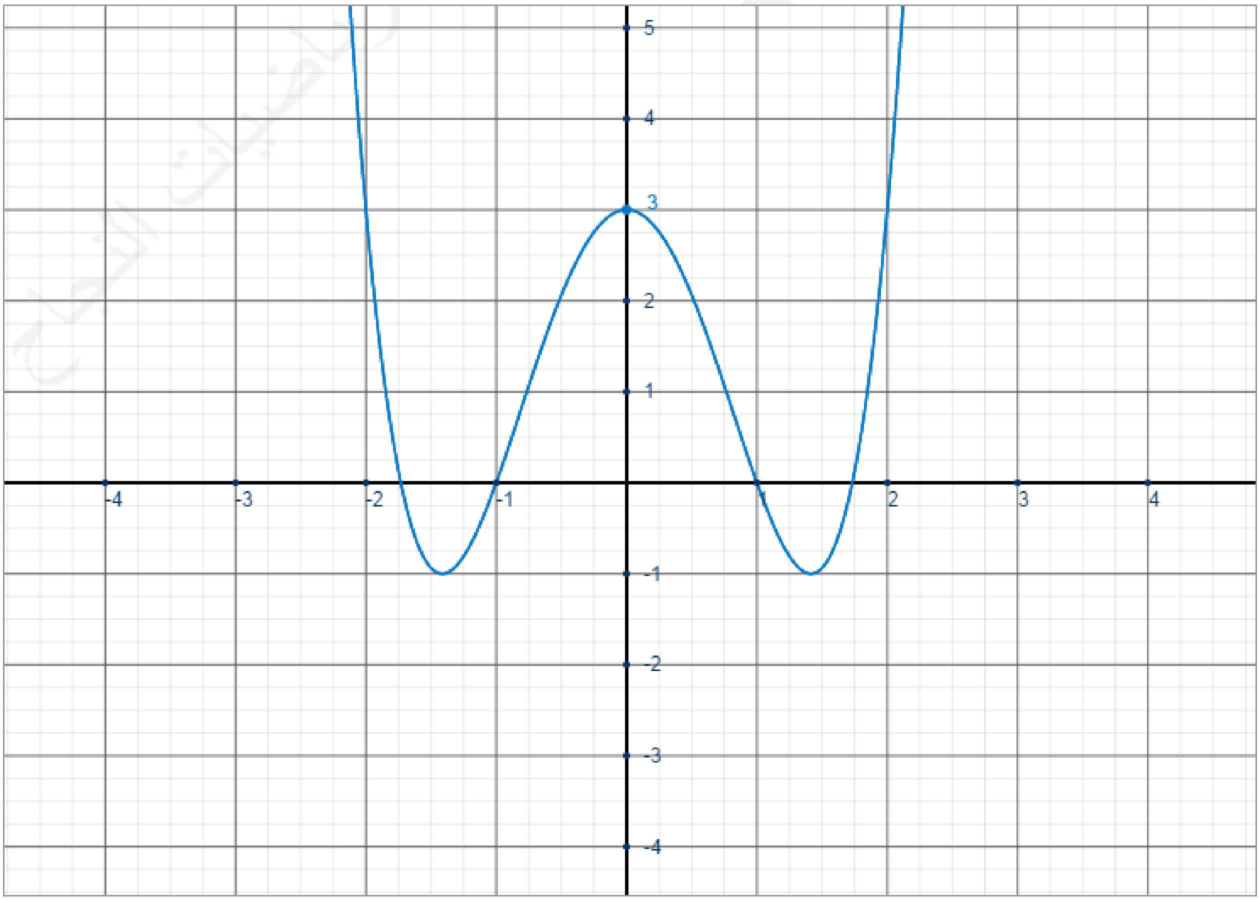
ولدينا g تزايدية على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $g\left(\left[\sqrt{2};+\infty\right[\right) = [2;+\infty[$ و f تزايدية على $[2;+\infty[$

إذن h تزايدية على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

5

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$		↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	

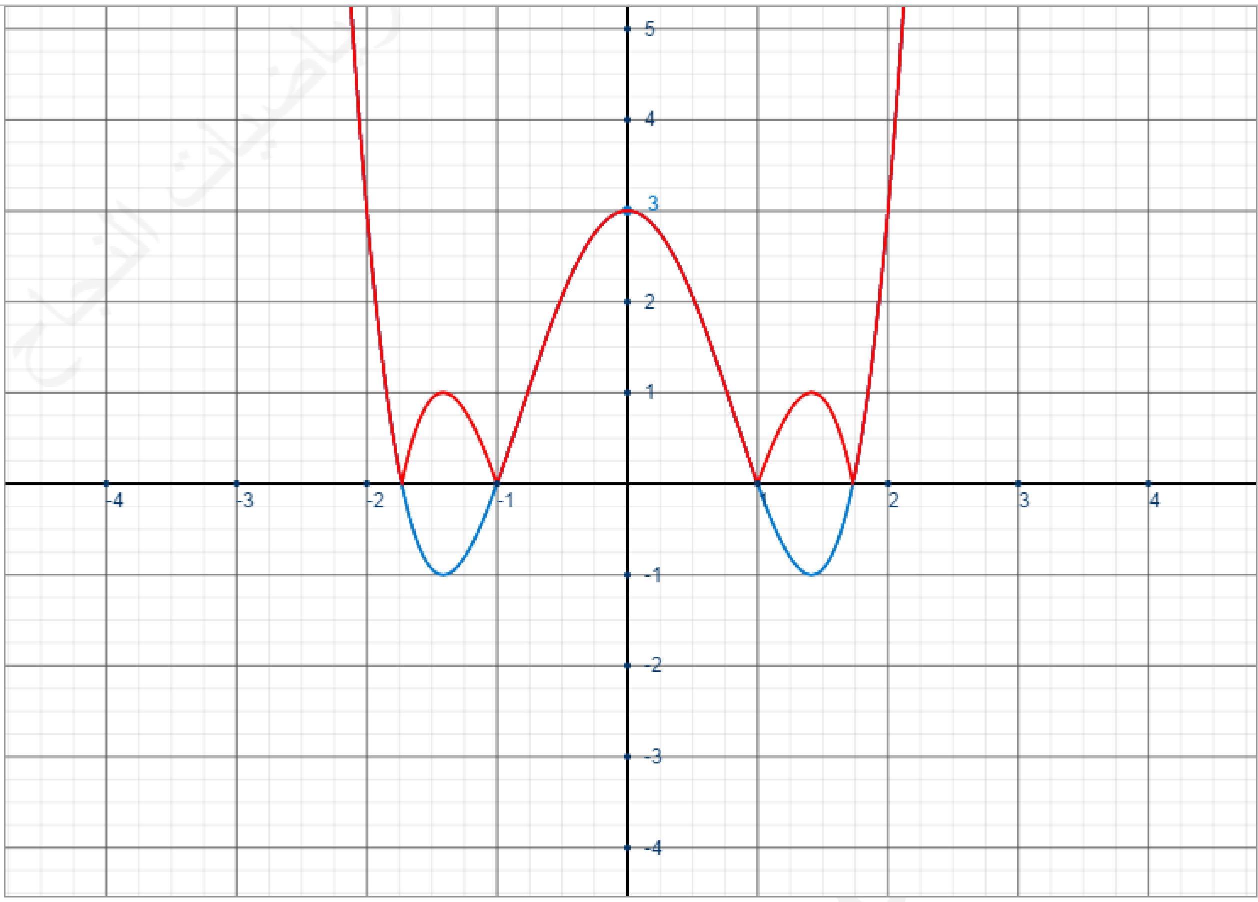
6



7

لإنشاء الدالة (C_p) نحتفظ بمنحنى الدالة h الذي تكون فيه موجبة و نعكسه في الحالة الأخرى

أ)



ب)

- إذا كان $m<0$ فالمعادلة $p(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m=0$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 4 حلول بالضبط
- إذا كان $0<m<1$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 8 حلول بالضبط
- إذا كان $m=1$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 6 حلول بالضبط
- إذا كان $1<m<3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 4 حلول بالضبط
- إذا كان $m=3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 3 حلول بالضبط
- إذا كان $m>3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حلان بالضبط.

<u>تمرين 3</u> : $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ ، $(\Delta):\ y=-2x+2$

1

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ،

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

لدينا : $Dg=\{x\in IR/|x|\geq 0\}=IR$

و $\forall x\in IR\ \ g(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=g(x)$

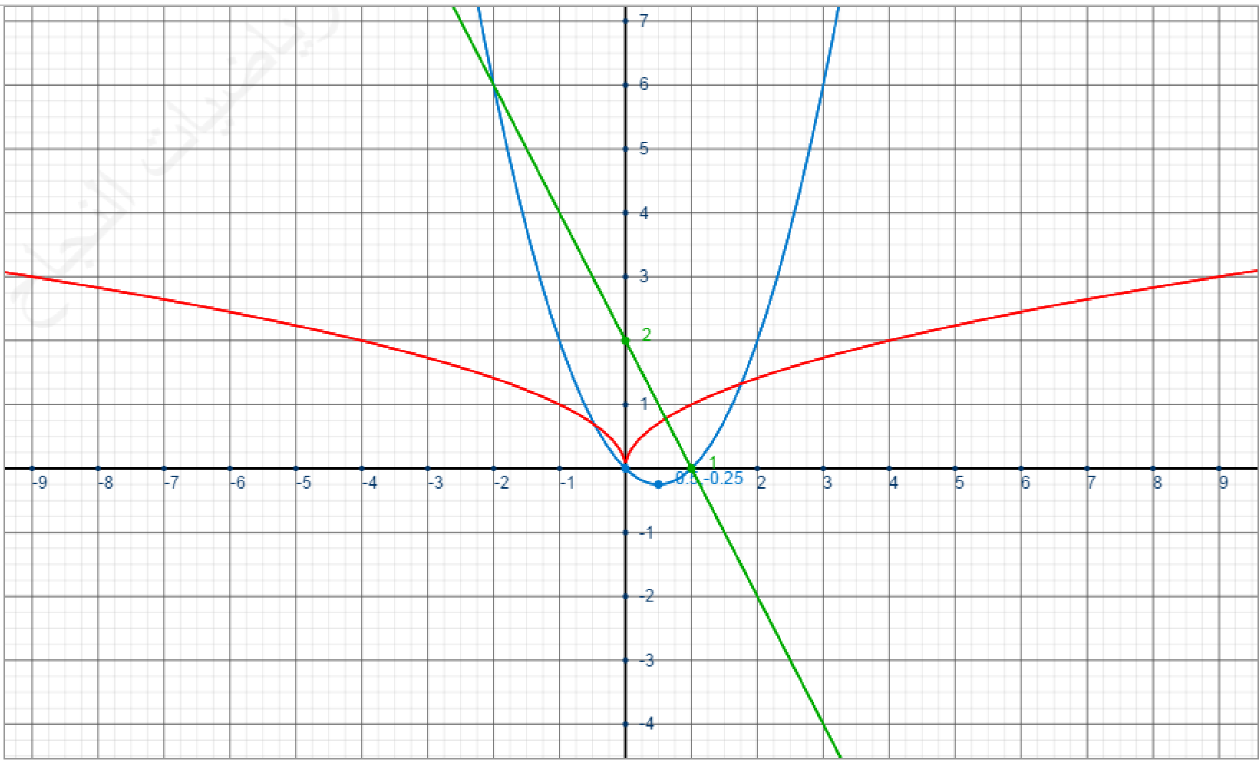
إذن : g دالة زوجية

من جهة أخرى : $\forall x\in IR^+\ \ g(x)=\sqrt{x}$

إذن جدول تغيراتها هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2



3

المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$ تكافئ $g(x)=-2x+2$

مبيانيا نجد أن Cg و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.

4

لنحدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) و (Δ)

من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=-2x+2$ أي: $x^2-x=-2x+2$ أي: $x^2-x+2x-2=0$

أي $x^2+x-2=0$، لدينا: $\Delta=1+8=9$ منه: $x=\frac{-1+3}{2}=1$ أو $x=\frac{-1-3}{2}=-2$

إذن (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $E(1,f(1))$ و $F(-2,f(-2))$ أي: $E(1,0)$ و $F(-2,6)$

5

مبيانيا نجد أن:

- حل المتراجحة $g(x)\leq 3$ هو: $S=[-9;9]$
- حل المتراجحة $g(x)\geq 2$ هو: $S=]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$
- حل المتراجحة $-2x+2<f(x)<2$ هو: $S=(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)\cap[-1,2]=[1;2]$

6

$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f([-2;1])=\left[\frac{-1}{4};6\right]$ و $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$ و $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$

7

لدينا: $Dh=IR^+$ و $\forall x\in IR^+\ \ h(x)=x-\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=f(\sqrt{x})=f(g(x))=f\circ g(x)$

رتابة الدالة h على $I=\left[0;\frac{1}{4}\right[$ ، لدينا:

- g تزايدية على I
- $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و f تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right[$

إذن h تناقصية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$

رتابة الدالة h على $J=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، لدينا:

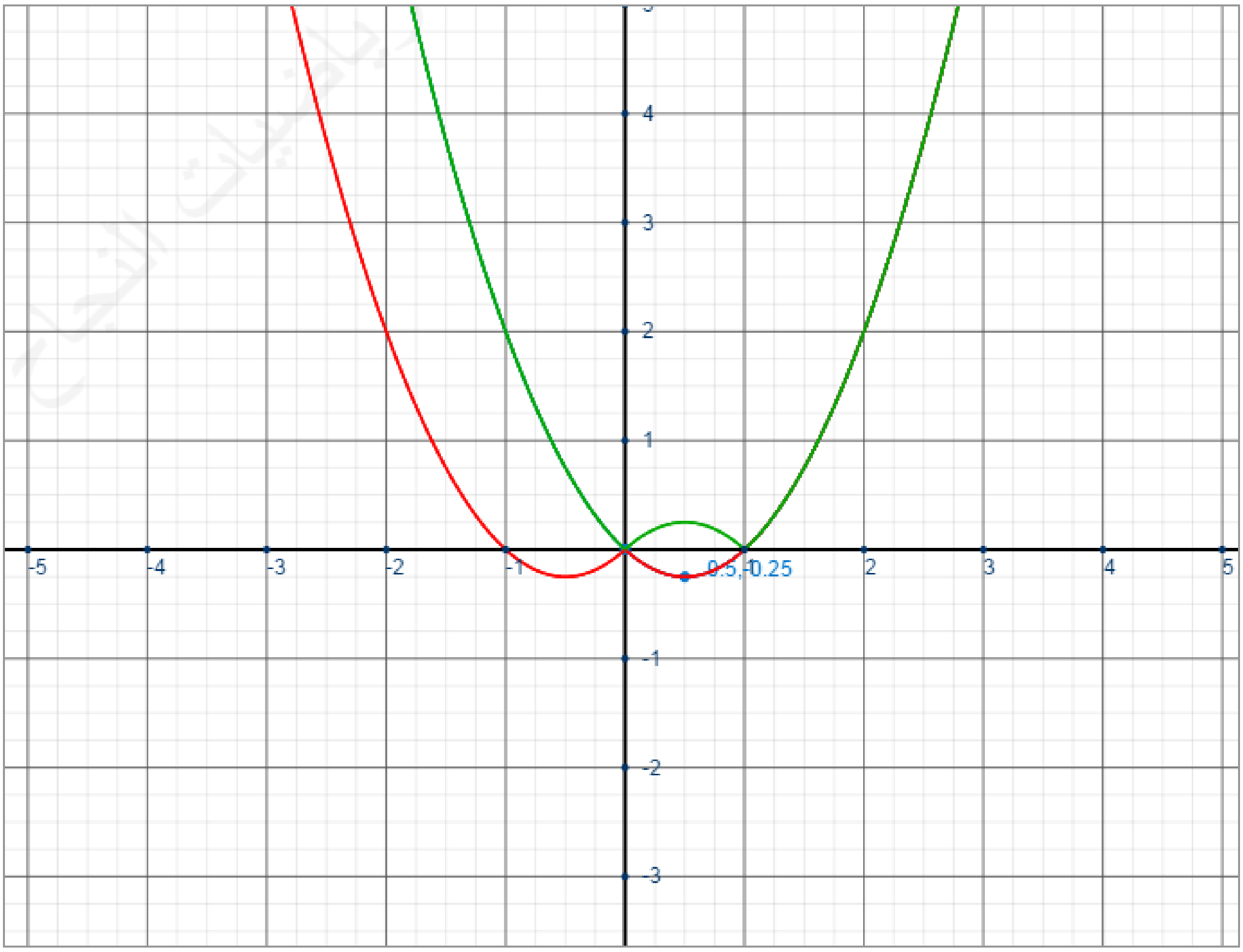
- g تزايدية على J
- $g(J)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

صعوبة السؤال تكمن في إيجاد التقسيم المناسب للمجال $[0;+\infty[$ حتى يمكن تطبيق خاصية رتابة مركب دالتين

$k(x)$ دالة زوجية تساوي $f(x)$ على $[0;+\infty[$ (اللون الأحمر)

منحنى الدالة $p(x)$ يطابق منحنى الدالة f في المجال الذي تكون فيه موجبة و يماثله في الحالة الأخرى (اللون الأخضر) 8



- إذا كان $m < \frac{-1}{4}$ فالمعادلة $k(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m = \frac{-1}{4}$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها حلان بالضبط.
- إذا كان $\frac{-1}{4} < m < 0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها 4 حلول بالضبط 9
- إذا كان $m=0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها 3 حلول بالضبط
- إذا كان $m>0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها حلان بالضبط

<u>تمرين 4</u> : $n \in IN^*$

- لدينا : $1<3<4$ منه $1<\sqrt{3}<2$ منه : $E(\sqrt{3})=1$
- لدينا : $4<7<9$ منه $2<\sqrt{7}<3$ منه $7<\sqrt{7}+5<8$ منه : $E(\sqrt{7}+5)=7$
- لدينا : $(\sqrt{2}+1)^2=3+\sqrt{8}$ و $2<\sqrt{8}<3$ منه $5<(\sqrt{2}+1)^2<6$ منه : $E\left((\sqrt{2}+1)^2\right)=5$
- لدينا : $n^2 \le n^2+n<n^2+2n+1$ منه : $n \le \sqrt{n^2+n}<n+1$ منه : $E(\sqrt{n^2+n})=n$
- لدينا : $\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}$ و : $0 \le \frac{1}{2n}<1$ منه : $E\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=1+E\left(\frac{1}{2n}\right)=1+0=1$ 1
- لدينا : $\frac{2n+3}{n+1}=\frac{2n+2+1}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}$ و : $0 \le \frac{1}{n+1}<1$ منه : $E\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=2+E\left(\frac{1}{n+1}\right)=2+0=2$
- لدينا : $\frac{n^2+2n+4}{n+1}=\frac{(n+1)^2+3}{n+1}=n+1+\frac{3}{n+1}$ منه : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)$

إذا كان $\frac{3}{n+1}<1$ (أي $n>2$) فإن : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1$

إذا كان : $n=2$ (لا توجد حالة أخرى لكون $n\in IN^*$) فإن: $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=3+E\left(\frac{3}{3}\right)=4$

للتكير : إذا كان $p\leq x<p+1$ حيث $p\in Z$ فإن: $E(x)=p$

$E(x+p)=p+E(x)$ لكل $x\in IR$ و لكل $p\in Z$

قد نظطر لدراسة الحالات في تعابير تتضمن بارامترا أو متغيرا.

2

▪ $3\leq x<4 \Leftrightarrow E(x)=3$ بالتالي: $S=[3;4[$

▪ $-2\leq x<\frac{-5}{3} \Leftrightarrow -1\leq 3x+5<0 \Leftrightarrow E(3x+5)=-1$ بالتالي: $S=\left[-2;\frac{-5}{3}\right[$

▪ $E(x^2+5)=\frac{7}{4}\notin Z \Leftrightarrow 4E(x^2+5)=7$ بالتالي: $S=\phi$

▪ نضع : $\frac{x}{3}=k$ فتصبح المعادلة تكافئ:

$$E\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} E\left(\frac{3k+1}{2}\right)=k \\ k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\leq \frac{3k+1}{2}<k+1 \\ k\in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k\leq 3k+1<2k+2 \\ k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq k<1 \\ k\in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k=0 \ ou \ k=-1$$

بالتالي : $S=\{0;-3\}$

3

▪ $x<5 \Leftrightarrow E(x)\leq 4$ بالتالي : $S=]-\infty;5[$

▪ $x<3 \Leftrightarrow E(x)\leq 2 \Leftrightarrow E(x)\leq 2{,}5 \Leftrightarrow 2E(x)\leq 5$ بالتالي : $S=]-\infty;3[$

$x\geq 2 \Leftrightarrow E(x)\geq 2$ بالتالي : $S=[2;+\infty[$

▪ $x\geq 3 \Leftrightarrow E(x)\geq 3 \Leftrightarrow E(x)\geq 2{,}5 \Leftrightarrow 2E(x)\geq 5$ بالتالي : $S=[3;+\infty[$

▪ $-3\leq x<\frac{10}{3} \Leftrightarrow -9\leq 3x<10 \Leftrightarrow -9\leq E(3x)\leq 9 \Leftrightarrow -10<E(3x)<10 \Leftrightarrow |E(3x)|<10$

بالتالي : $S=\left[-3;\frac{10}{3}\right[$

الهدف من التمرين التعريف بإحدى القواعد غير المعروفة : $x<p \Leftrightarrow E(x)\leq p$ و $x\geq p \Leftrightarrow E(x)\geq p$ حيث $p\in Z$

تمرين 5 : مزيدا من التفكير

1

حدد القيمة الدنوية المطلقة و القيمة القصوية المطلقة للدالة $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$

أولا لدينا : $\forall x\in IR \ \ x^2+x+1>0$ لأن : $\Delta=-3<0$ و $a=1>0$

من جهة أخرى ، ليكن : $(\alpha,\beta)\in IR^2$ ، نعتبر العبارة $\forall x\in IR \ \ \alpha\leq f(x)\leq\beta$:(P)

لدينا :

$$(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \ \alpha\leq \frac{x}{x^2+x+1}\leq\beta$$

$$(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \ \alpha x^2+\alpha x+\alpha\leq x\leq \beta x^2+\beta x+\beta$$

$$(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \begin{cases} \alpha x^2+(\alpha-1)x+\alpha\leq 0 \\ \beta x^2+(\beta-1)x+\beta\geq 0 \end{cases}$$

	إذن لكي تتحقق العبارة (P) يكفي أن يكون : $\begin{cases}\alpha<0\\(\alpha-1)^2-4\alpha^2\le 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\(\beta-1)^2-4\beta^2\le 0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\alpha<0\\-3\alpha^2-2\alpha+1\le 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\-3\beta^2-2\beta+1\le 0\end{cases}$ لدينا محددة الحدودية $-3x^2-2x+1$ هي : $\Delta=4+12=16$ منه : $x_1=\frac{2+4}{-6}=-1$ و $x_1=\frac{2-4}{-6}=\frac{1}{3}$ منه : $x\le -1\ ou\ x\ge\frac{1}{3} \Leftrightarrow -3x^2-2x+1\le 0$ (باستعمال جدول الإشارات) إذن لكي تتحقق العبارة (P) يكفي أن يكون : $\begin{cases}\alpha<0\\\alpha\ge\frac{1}{3}\ ou\ \alpha\le -1\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\\beta\ge\frac{1}{3}\ ou\ \beta\le -1\end{cases}$ إذن يكفي أن نأخذ: $\alpha=\frac{1}{3}$ و $\beta=-1$ الآن نبرهن بسهولة أن : $(P):\quad \forall x\in IR\ -1\le f(x)\le\frac{1}{3}$ (بحساب الفرق) و أيضا : $f(1)=\frac{1}{3}$ و $f(-1)=-1$ وبذلك يكون : $\underset{x\in IR}{Max}\ f(x)=\frac{1}{3}$ و $\underset{x\in IR}{Min}\ f(x)=-1$	
2	لنحل في IR المعادلة : $E(x^2)=(E(x))^2$ نضع: $E(x)=p$ منه $E(x^2)=p^2$ منه : $\begin{cases}p\le x<p+1\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ إذا كان : $p<0$ فإن : $p\le -1$ منه $p+1\le 0$ منه : $\begin{cases}(p+1)^2<x^2\le p^2\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ منه $p^2\le x^2\le p^2$ منه $x^2=p^2$ منه : $x=p$ أو $x=-p$ ، عكسيا العددان p و $-p$ يحققان المعادلة. إذا كان $p\ge 0$ فإن المعادلة تكافئ: $\begin{cases}x\ge 0\\p^2\le x^2<(p+1)^2\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x\ge 0\\p^2\le x^2<p^2+2p+1\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x\ge 0\\p\le x^2<p^2+1\end{cases}$ (لأن : $p^2+1\le p^2+2p+1$ حيث أن : $x<p^2+1\Rightarrow x<p^2+2p+1$) تكافئ : $p\le x<\sqrt{p^2+1}$ خلاصة : $S=\{p,-p\ /\ p\in IN^*\}\cup\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)=Z\cup\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)$	
	مجموعة الحلول هي عبارة عن اتحاد المجموعة Z و مجالات ، مثلا المجال $\left[3;\sqrt{10}\right[$ جزء من مجموعة الحلول الرمز $\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)$ يرمز لاتحاد مجالات غير منتهية	