| السنة 1 بكالوريا علوم رياضية | عموميات حول الدوال العددية<br>حلول مقترحة | سلسلة 2 |
|---|---|---|

**تمرين 1** : $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

1

لدينا : $Df=\{x\in IR \ / \ x\neq 0\}=IR^*$ ، منه : $x\in Df \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow -x\neq 0 \Rightarrow -x\in Df$

و من جهة أخرى : $f(-x)=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{-x}=\dfrac{-x}{3}+\dfrac{-3}{x}=-f(x) \quad \forall x\in Df$

بالتالي : $f$ دالة فردية.

2

أ) ليكن $x$ و $y$ من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ ، لدينا :

$$T(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-\frac{y}{3}-\frac{3}{y}}{x-y}=\frac{\frac{x-y}{3}+\frac{3y-3x}{xy}}{x-y}=\frac{(x-y)\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{xy}\right)}{x-y}=\frac{1}{3}-\frac{3}{xy}=\frac{xy-9}{3xy}$$

ب) ليكن : $x$ و $y$ من $]0;3]$ حيث $x\neq y$ :

لدينا : $\begin{cases}x\in]0;3]\\ y\in]0;3]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x\leq 3\\ 0<y\leq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ 0<xy\leq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ xy-9\leq 0\end{cases}\Rightarrow T(x,y)\leq 0$

ليكن : $x$ و $y$ من $[3,+\infty[$ حيث $x\neq y$ :

لدينا : $\begin{cases}x\in[3,+\infty[\\ y\in[3,+\infty[\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 3\\ y\geq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ xy\geq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ xy-9\geq 0\end{cases}\Rightarrow T(x,y)\geq 0$

إذن : $f$ تناقصية على $]0;3]$ و تزايدية على $[3,+\infty[$

ج) حسب السؤال السابق و باستعمال فردية الدالة نستنتج أن :

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $0$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

3

حسب جدول التغيرات نستنتج أن القيمة الدنوية للدالة $f$ على $]0;+\infty[$ هي $2=f(3)$ و القيمة القصوى على $]-\infty;0[$ هي $f(-3)=-2$

**تمرين 2** : $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$

1

ليكن $x$ و $y$ من $IR$ حيث $x\neq y$ ، لدينا :

$$f(x)-f(y)=\left(x^3+3x^2+3x+5\right)-\left(y^3+3y^2+3y+5\right)=\left(x^3-y^3\right)+3\left(x^2-y^2\right)+3(x-y)$$

$$=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+3(x-y)(x+y)+3(x-y)$$

$$f(x)-f(y)=(x-y)\left(x^2+xy+y^2+3(x+y)+3\right)$$

منه : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2+3x+3y+3$

من جهة أخرى ، لدينا :

$$\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2=x^2+x(y+3)+\frac{(y+3)^2}{4}+\frac{3}{4}\left(y^2+2y+1\right)$$

$$=x^2+xy+3x+\frac{y^2+6y+9+3y^2+6y+3}{4}$$

$$=x^2+x\,y+3x+\frac{4y^2+12y+12}{4}$$

$$\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2=x^2+x\,y+3x+y^2+3y+3$$

بالتالي : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2$

2 بما أن معدل تغير عددين حقيقيقن مختلفين دائما موجب فإن الدالة تزايدية على $IR$

**<u>تمرين 3</u>** : نعتبر الدالتين $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$

1

$f$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2}=0$ ، وبما أن $a=1>0$ فإن :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

$g$ عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن

تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول مركزه :

$\Omega(1,1)$ و بما أن $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2<0$ فالدالة تناقصية

للتذكير مركز الهذلول هو : $\Omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | ‖ | ↘ |

2

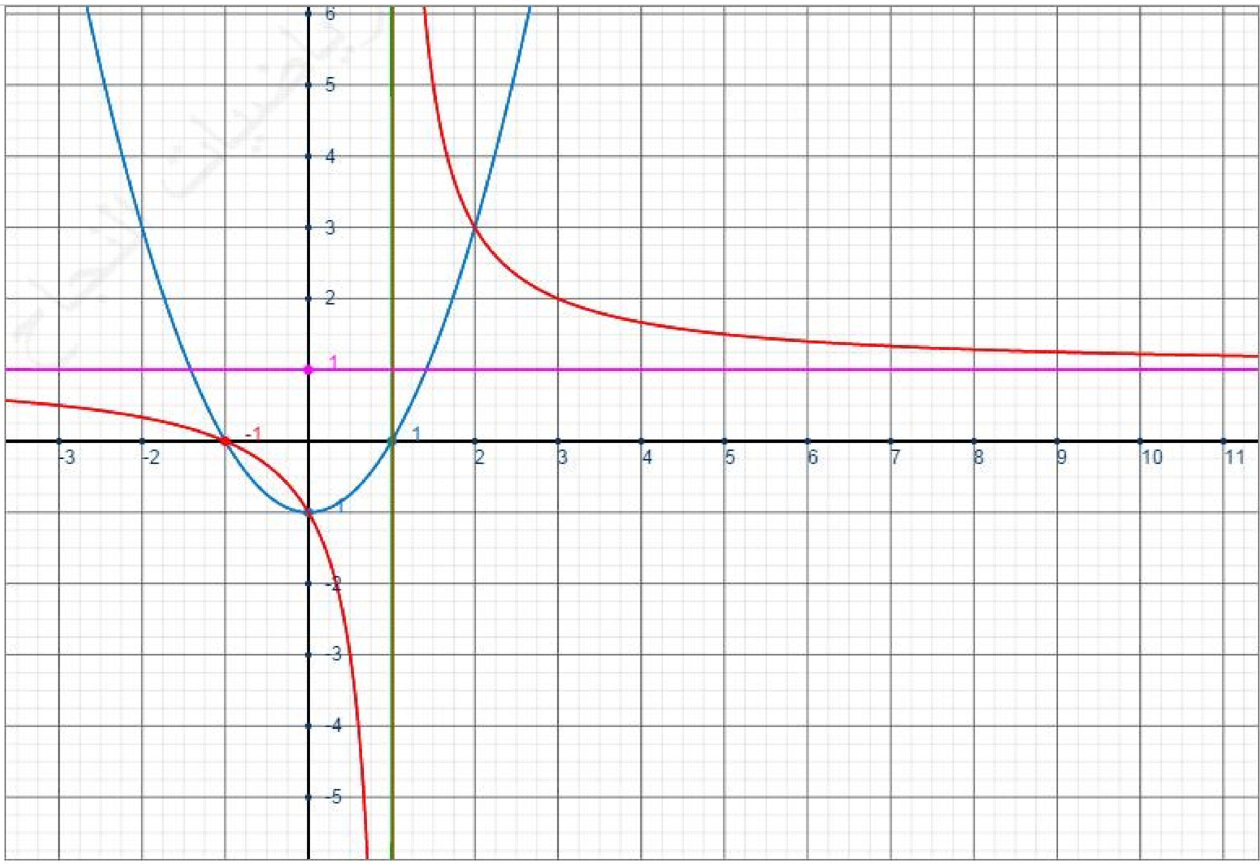
لدينا : $f(-1)=1-1=0$ و $g(-1)=\frac{0}{-2}=0$ منه : $f(-1)=g(-1)=0$

و أيضا : $f(0)=0-1=-1$ و $g(0)=\frac{1}{-1}=-1$ منه : $f(0)=g(0)=-1$

و أيضا : $f(2)=4-1=3$ و $g(2)=\frac{3}{1}=3$ منه : $f(2)=g(2)=3$

بالتالي $(C_f)$ و $(C_g)$ يتقاطعان في $A_1(-1;0)$ و $A_2(0;-1)$ و $A_3(2;3)$

3



4 مبيانيا نجد $g([2;+\infty[)=]1;3]$ .

5

أ) لدينا لكل $x$ من $I$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x}{(x-1)^2}=h(x)$$

ب) لدينا $g$ تناقصية على $I=[2;+\infty[$ ، و $g([2;+\infty[)=]1;3]$ ، ولدينا $f$ تزايدية على $]1;3[$
إذن $h$ تناقصية على $I$

**تمرين 4** : $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x)$ و $g(x)=\sqrt{x}$

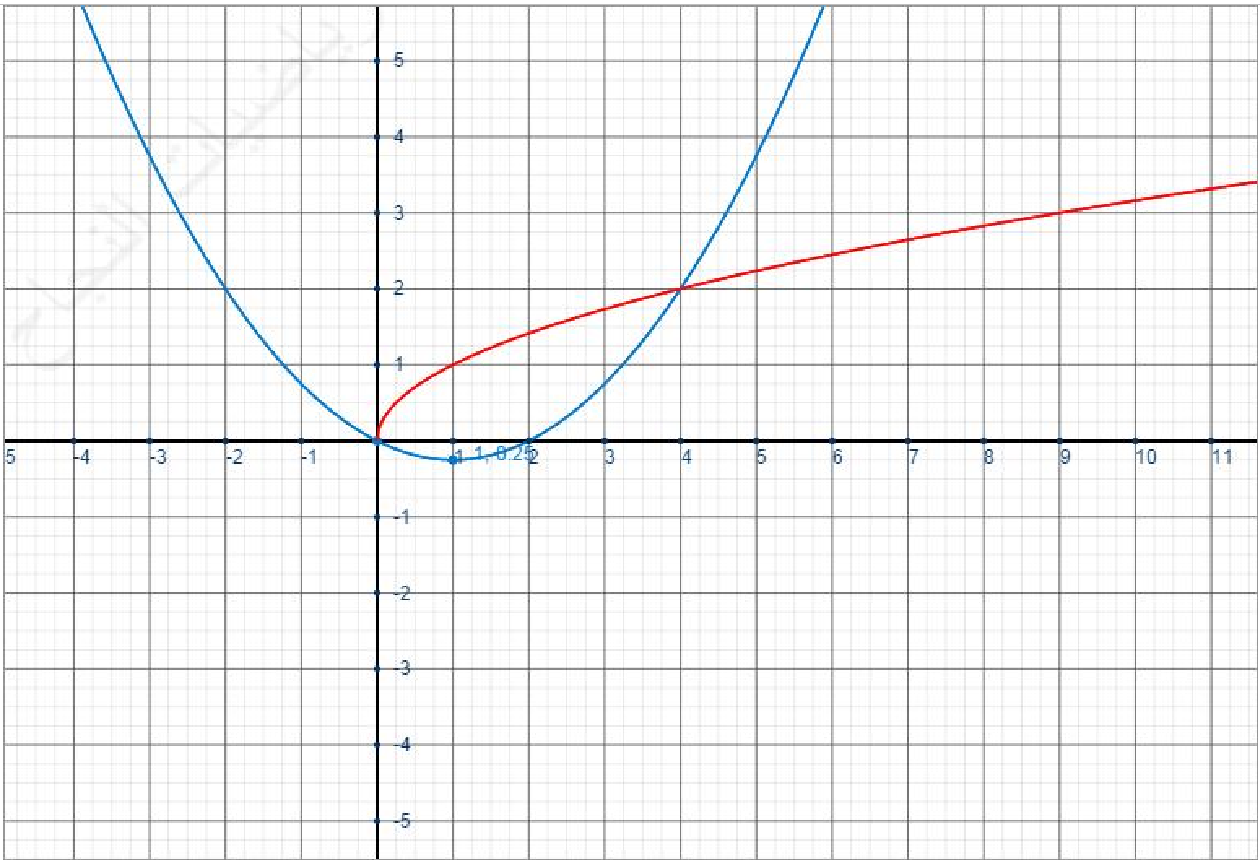
1

$f$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية
إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}=1$ ، وبما أن $a=\frac{1}{4}>0$ فإن :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ |

2




$f(0)=0$ و $f(2)=0$ و $f(4)=2$ و $g(4)=2$

3 مبيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلين هما : 0 و 4

4 مبيانيا مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<g(x)$ هي : $S=]0;4[$

5 نعتبر الدالة المعرفة على $IR^+$ بما يلي : $h(x)=\frac{1}{4}(x-2\sqrt{x})$ ، حدد منحى تغيرات الدالة $h$ على $IR^+$

لدينا : $h(x)=\frac{1}{4}(x-2\sqrt{x})=\frac{1}{4}\left((\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\right)=f(g(x))=f\circ g(x)$

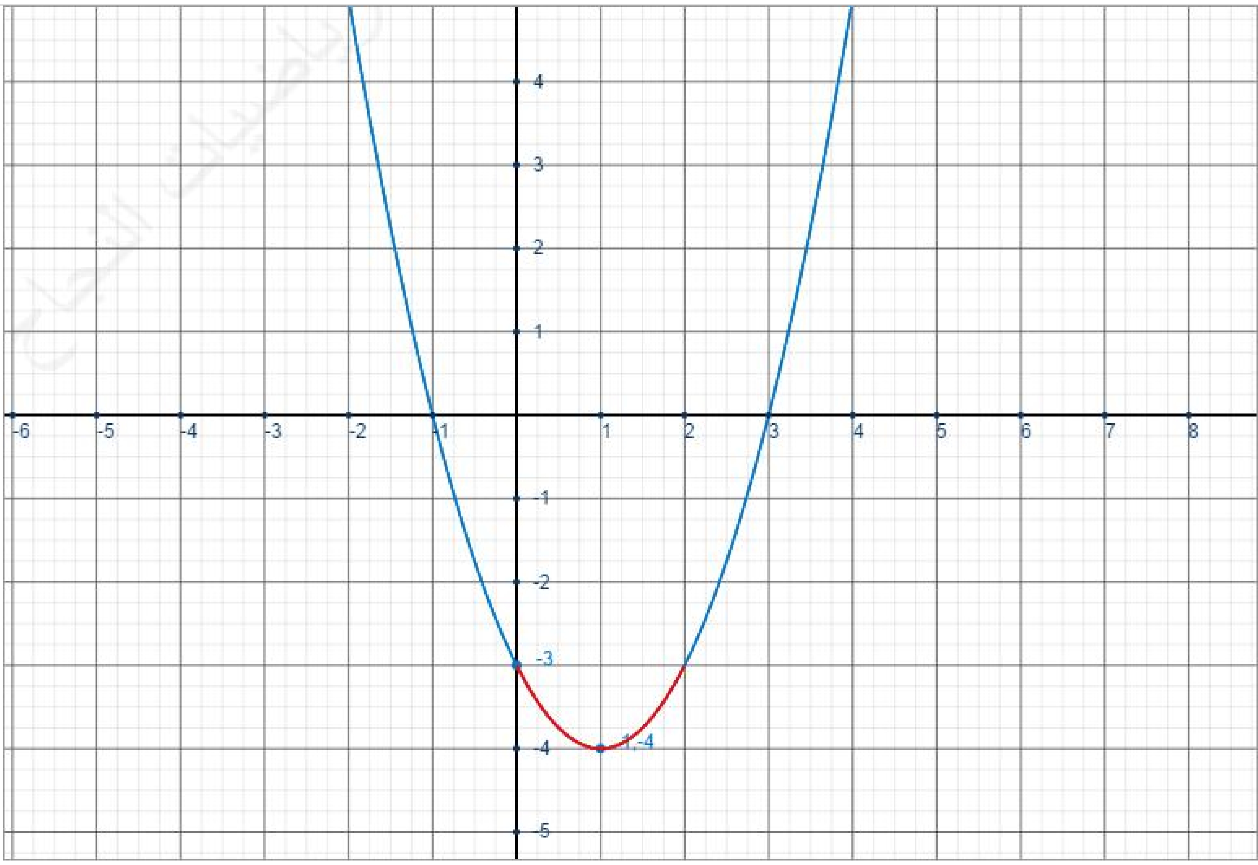
- لدينا $g$ تزايدية على $[1;+\infty[$ ، ولدينا مبيانيا $g([1;+\infty[)=[1;+\infty[$
وبما أن $f$ تزايدية على $[1;+\infty[$ فإن $h$ تزايدية على $[1;+\infty[$
- لدينا $g$ تزايدية على $[0;1]$ ، ولدينا مبيانيا $g([0;1])=[0;1]$
وبما أن $f$ تناقصية على $[0;1]$ فإن $h$ تناقصية على $[0;1]$

لم يكن ممكنا دراسة الرتابة على $IR^+$ مباشرة لأن $g(0)=[0;+\infty[$ ، لكن رتابة $f$ على هذا المجال متغيرة(ليست دائما تزايدية و لا تناقصية)، لذلك قمنا بتقسيم المجال لمجالين حيث يكون صورة كل منهما عبارة عن مجال تكون فيه رتابة الدالة $f$ ثابتة.

**تمرين 5** : نعتبر الدوال : $f(x)=x^2-2x-3$ و $g(x)=x^2-2|x|-3$ و $h(x)=|x^2-2x-3|$

1 أ) $f$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية
إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :
$\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$ ، وبما أن $a=1>0$ فإن :

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-4$ | ↗ |

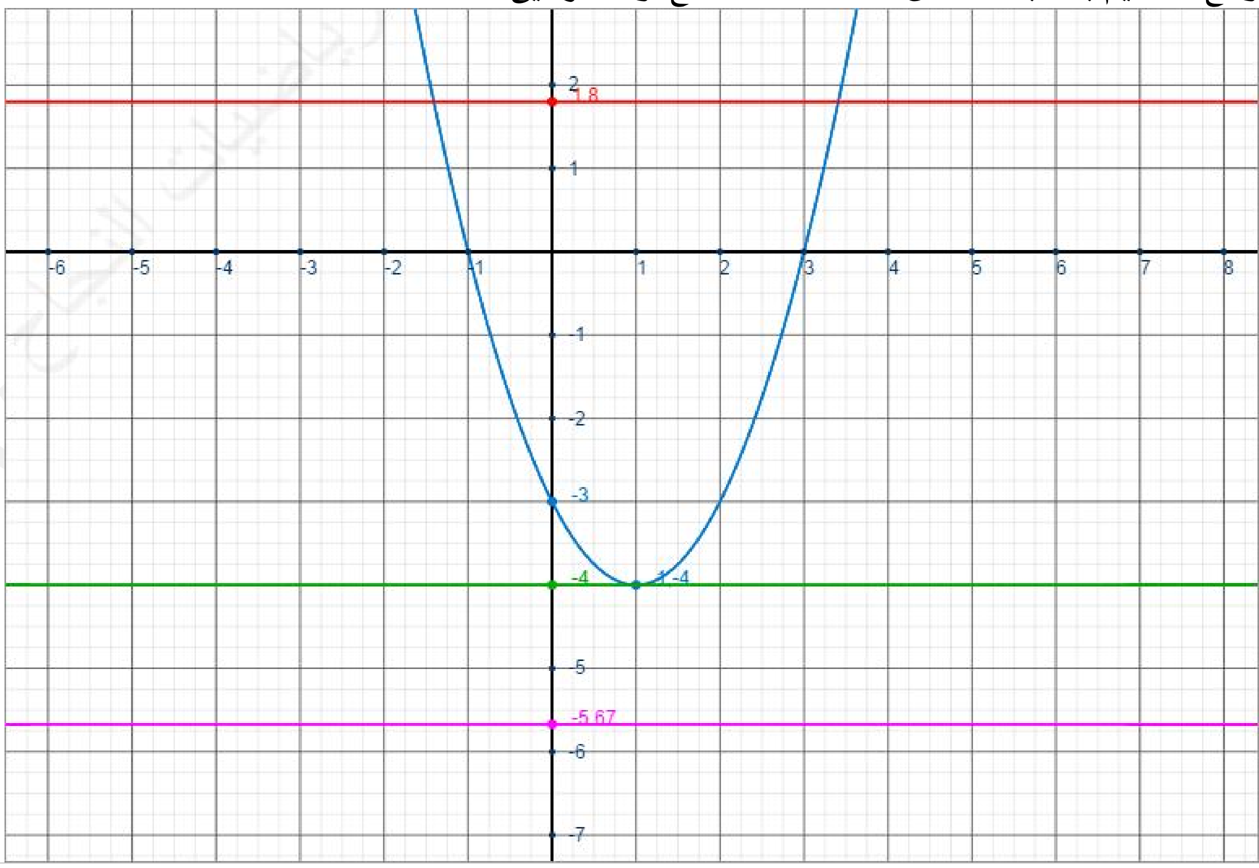


ب) مبيانيا نجد أن مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)\leq -3$ هي: $S=[0;2]$

- إذا كان $m<-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m=-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد (هو $x=1$ )
- إذا كان $m>-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حلان بالظبط.

ج)

- ليس مطلوبا حل المعادلة بل فقط تحديد عدد الحلول
- الطريقة تعتمد على تخيل مستقيم مواز لمحور الأفاصيل و يقطع محور الأفاصيل في نقطة أرتوبها m ، و وفق وضع المستقيم بالنسبة للمنحنى نحدد حالات التقاطع، و هذا توضيح :

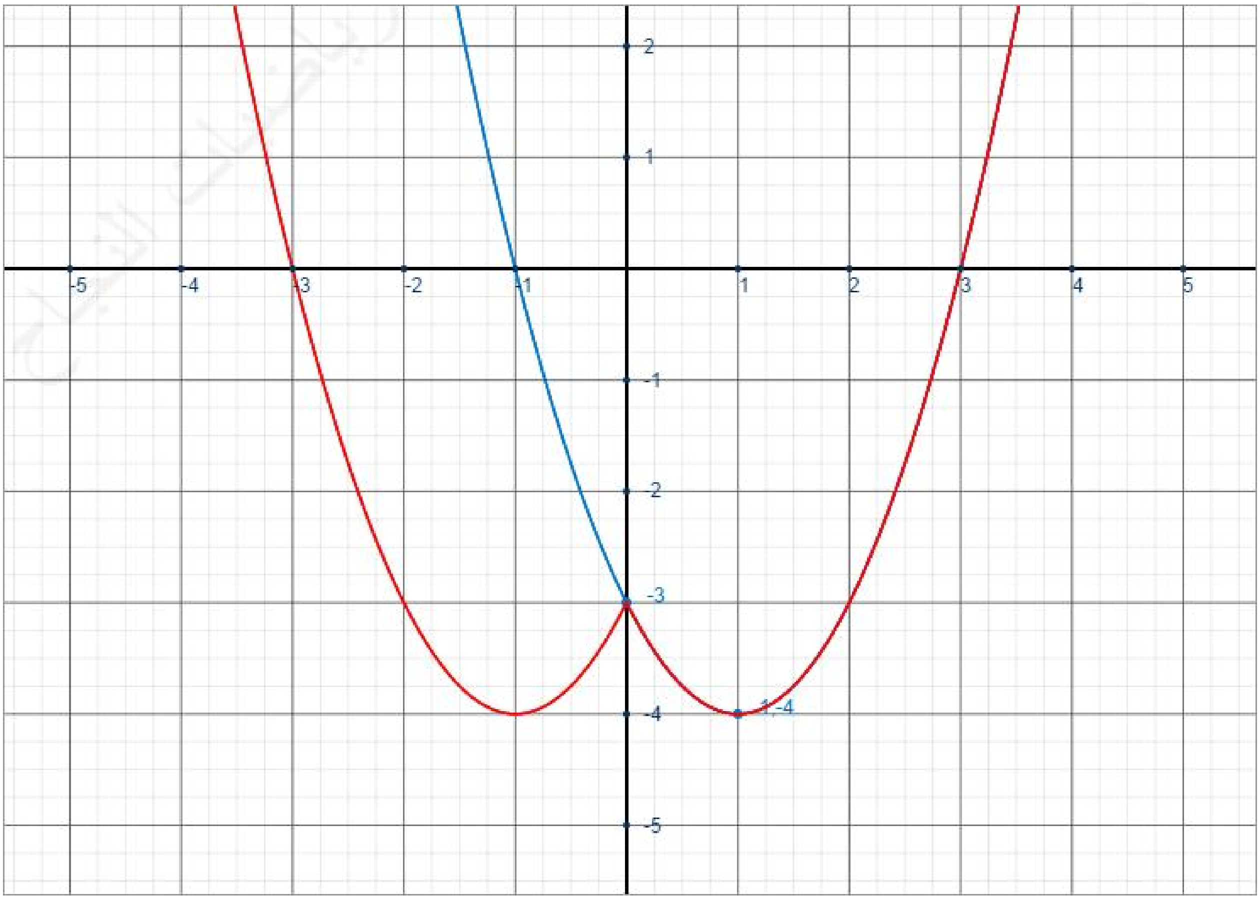


2) أ) $Dg = IR$ و $g(x) = g(-x)$ $\forall x \in IR$ إذن $f$ دالة زوجية.

ب) بما أن $f$ دالة زوجية، فتمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.

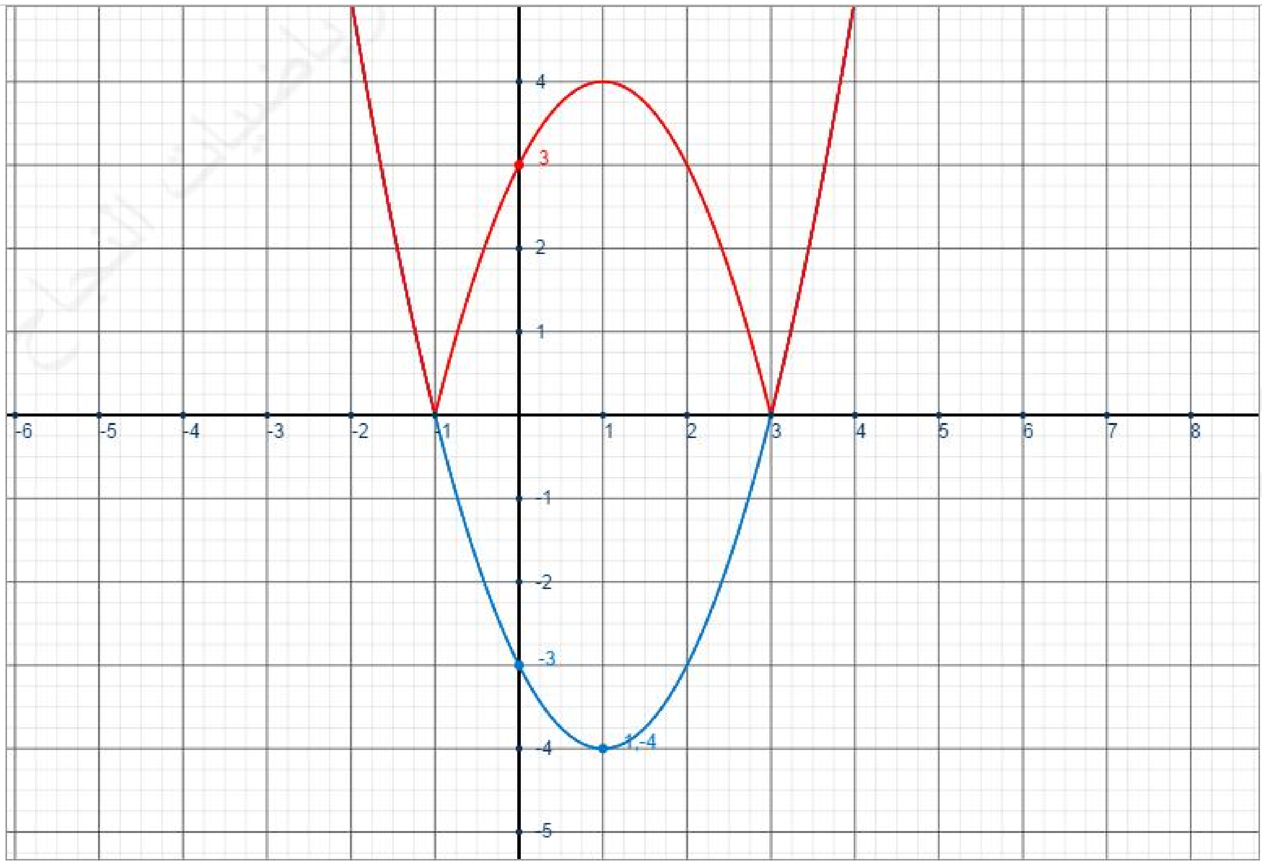
بما أن $g(x) = f(x)$ $\forall x \in IR^{+}$ فالتمثيل المبياني للدالة $g$ هو نفس التمثيل المبياني للدالة $f$ على $IR^{+}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-4$ | ↗ $-3$ ↘ | $-4$ | ↗ |




3) أ) على $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ $f(x) \geq 0$ منه $h(x) = f(x)$

و على $[-1;3]$ $f(x) \leq 0$ منه $h(x) = -f(x)$




4