الجداء السلمي لمتجهتين :

- $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = AB\ AC\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$
- $\vec u\bullet\vec v = \|\vec u\|\,\|\vec v\|\cos\left(\vec u,\vec v\right)$

خاصيات :

$\vec u\bullet\vec v=\vec v\bullet\vec u$ و $\vec u\bullet\left(\vec v+\vec w\right)=\vec u\bullet\vec v+\vec u\bullet\vec w$

$\vec u\bullet\left(k\vec v\right)=k\vec u\bullet\vec v$ و $\left(k\vec u\right)\bullet\vec v=k\vec u\bullet\vec v$

- الجداء $\vec u\bullet\vec u$ يسمى مربع سلمي ويكتب $\vec u^2$
- العدد $\sqrt{\vec u^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec u$ ويكتب $\|\vec u\|=\sqrt{\vec u^2}$
- $\vec u$ و $\vec v$ متعامدتين $\Leftrightarrow$ $\vec u\bullet\vec v=0$

خاصيات المنظم :

$\|k\vec u\|=|k|\,\|\vec u\|$ و $\|\vec u+\vec v\|\le\|\vec u\|+\|\vec v\|$

$\|\vec u+\vec v\|^2=\|\vec u\|^2+2\vec u\bullet\vec v+\|\vec v\|^2$

$\|\vec u-\vec v\|^2=\|\vec u\|^2-2\vec u\bullet\vec v+\|\vec v\|^2$

$\|\vec u\|^2-\|\vec v\|^2=\left(\vec u+\vec v\right)\bullet\left(\vec u-\vec v\right)$

متفاوتة كوشي شوارز:

$|\vec u\bullet\vec v|\le\|\vec u\|\times\|\vec v\|$ لكل متجهتين $\vec u$, $\vec v$

تحليلية الجداء السلمي :

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec i,\vec j\right)$

و $\vec u(a,b)$ و $\vec v(c,d)$ فإن: $\vec u\bullet\vec v=ac+bd$

ومنظم المتجهة $\vec u$ هو العدد $\|\vec u\|=\sqrt{a^2+b^2}$

صيغة cos و sin :

$\vec u$ و $\vec v$ متجهتين غير منعدمتين

$$\cos\left(\vec u,\vec v\right)=\frac{\vec u\bullet\vec v}{\|\vec u\|\,\|\vec v\|} \quad \text{و} \quad \sin\left(\vec u,\vec v\right)=\frac{\det\left(\vec u,\vec v\right)}{\|\vec u\|\,\|\vec v\|}$$

التمرين الأول:

أحسب الجداء السلمي للمتجهتين $\vec u$ و $\vec v$ في الحالات التالية :

① $\|\vec u\|=2$ و $\|\vec v\|=3$ و $\overline{\left(\vec u,\vec v\right)}=\frac{\pi}{6}$

② $\|\vec u\|=\sqrt8$ و $\|\vec v\|=6$ و $\overline{\left(\vec u,\vec v\right)}=\frac{\pi}{4}$

فيما يلي نعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec i,\vec j\right)$

التمرين الثاني:

أحسب الجداء السلمي للمتجهتين $\vec u$ و $\vec v$ في الحالات التالية:

❶ $\vec u(3,-2)$ و $\vec v(2,-5)$

❷ $\vec u=2\vec i-9\vec j$ و $\vec v=\vec i+4\vec j$

❸ حدد قيمة m كي تكون $\vec u$ و $\vec v$ متعامدتين في الحالات التالية:

⇐ $\vec u(3,m-1)$ و $\vec v(2m+1,-2)$

⇐ $\vec u(m+3,-1)$ و $\vec v(m-1,5)$

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في الحالات التالية :

☜ $A(4,-2)$; $B(2,3)$; $C(-5,1)$

☜ $A\left(2+\sqrt2,4\right)$; $B\left(3,-2\sqrt2\right)$; $C\left(\sqrt2-1,2\right)$

التمرين الثالث:

أحسب منظم المتجهة $\vec u$ في الحالات التالية:

☺ $\vec u(-3,4)$ ☺ $\vec u(2,-4)$

☺ $\vec u=\sqrt2\,\vec i-6\vec j$ ☺ $\vec u\left(\sqrt3-2,2\sqrt3+1\right)$

التمرين الرابع:

1) نعتبر النقط $A\left(2,\sqrt3\right)$; $B\left(-1,2\sqrt3\right)$; $C\left(0,\sqrt3\right)$

أ- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و المسافتين AC ; AB

ب- أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

2) نعتبر النقط $A(-1,1)$; $B\left(1,-\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{-1}{3},-\frac{11}{3}\right)$

أ- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

ب- استنتج قياس الزاوية $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$

التمرين الخامس :

ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع و نقطة بحيث

$\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^{*2} : \overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

بين أن $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}}$

التمرين السادس :

ABC مثلث A' ; B' و C' منتصفات القطع $[BC]$,$[AC]$ و $[AB]$ على التوالي و نضع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$

1- بين أن $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AB}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

2- بين أن $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

3- أثبت أن $AA'^2+BB'^2+CC'^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

4- G مركز ثقل المثلث ABC ونضع $\alpha=G\hat{C}B'$ و $\beta=C'\hat{B}G$

أ- بين أن $\frac{b}{BB'}\sin\alpha=\frac{c}{CC'}\sin\beta$

ب- استنتج أن $S_{BC'G}=S_{CB'G}$

التمرين السابع :

بين أن $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ (a+b)^2\le\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)$

(باستعمال خاصية كوشي شوارز)