السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المرجـــح حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $ABCD$ رباعي محدب . E و F هما على التوالي مركزا ثقلي المثلثين ABC و ADC

لدينا E مركز ثقل المثلث ABC أي مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$(*)\ \forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

لدينا F مركز ثقل المثلث ADC أي مرجح النقط $(A,1)$ و $(D,1)$ و $(C,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$(*)\ \forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ في المتساوية $(*)$: $M=E$ فنجد أن: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}\right)$

وبما أن E مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ فإن : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ أي : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DE}$

منه: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

بالتالي : $(EF)//(BD)$

الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.

تمرين 2 : ABC مثلث. E و I و F نقط حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ و I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$

1

لدينا $\overrightarrow{AE}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ منه : $5\overrightarrow{AE}+2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\vec{0}$

منه : $5\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ منه : $7\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ منه: $-7\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(A,-7)$ و $(B,2)$

لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرجح النقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$

لدينا $\overrightarrow{CF}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$ منه $9\overrightarrow{CF}=7\overrightarrow{CA}$ منه : $9\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ منه : $9\overrightarrow{CF}-7\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}\right)=\vec{0}$

منه : $9\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ منه : $2\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ منه: $-2\overrightarrow{FC}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(C,-2)$ و $(A,-7)$ (أو أيضا $(C,2)$ و $(A,7)$ خاصية الصمود)

2

لدينا E مرجح $(A,-7)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-7}{-5}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{-5}\overrightarrow{MB}$

لدينا F مرجح $(C,2)$ و $(A,7)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{MC}+\frac{7}{9}\overrightarrow{MA}$

نأخذ: $M=I$ فنجد أن: $\overrightarrow{IE}=\frac{7}{5}\overrightarrow{IA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{IC}+\frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

ولدينا I منتصف $[BC]$ منه : $\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IF}=\frac{-2}{9}\overrightarrow{IB}+\frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

إذن : $9\overrightarrow{IF}=-2\overrightarrow{IB}+7\overrightarrow{IA}$ و $5\overrightarrow{IE}=7\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}$ منه : $9\overrightarrow{IF}=5\overrightarrow{IE}$ أي $\overrightarrow{IF}=\frac{5}{9}\overrightarrow{IE}$

بالتالي: النقط E و I و F مستقيمية.

تمرين 3 : $A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$. E منتصف $[BC]$ و G مرجح النقطتين $(E,2)$ و $(A,1)$

1

لدينا E منتصف $[BC]$ منه : $\begin{cases} x_E=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{3}{2}\\ y_E=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$ منه: $E\left(\frac{3}{2}\,;\,2\right)$

لدينا: G مرجح $(E,2)$ و $(A,1)$ منه : $\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_E + x_A}{3} = \dfrac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{2y_E + y_A}{3} = \dfrac{4+4}{3} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$ منه: $G\left(2\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$

2 لدينا: $\overrightarrow{OE}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ و $\overrightarrow{OG}\left(2\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$ ولدينا : $\det\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OE}\right) = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - \dfrac{8}{3}\times\dfrac{3}{2} = 4-4 = 0$

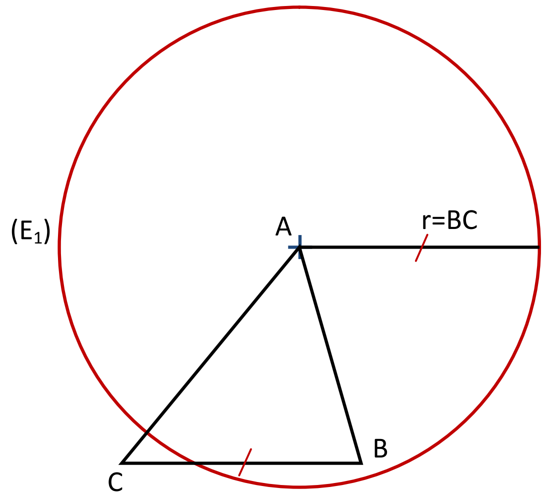
بالتالي : O و G و C مستقيمية.

تذكير: إحداثيتا مرجح $(A,\sim)$ و $(B,\ )$ و ... و $(K,ª)$ هي : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\sim x_A + \ x_B + \dots + ª\, x_K}{\sim + \ + \dots + ª} \\ y_G = \dfrac{\sim y_A + \ y_B + \dots + ª\, y_K}{\sim + \ + \dots + ª} \end{cases}$

تمرين 4 : ABC مثلث.

1 لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

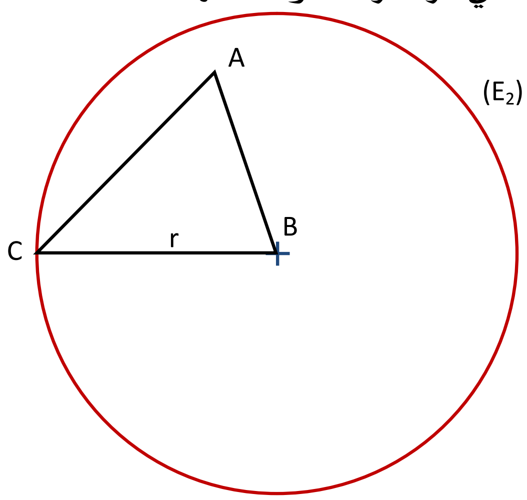
لدينا : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$



2 لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$

لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ منه : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ أي : $BM = BC$

بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$

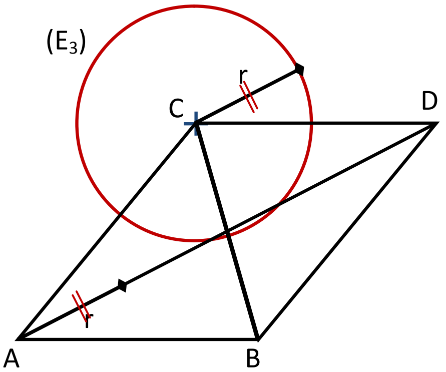


3 لنحدد (E_3) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|4\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (أي $ABDC$ متوازي أضلاع)

منه : $\left\|4\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ أي : $4CM = AD$ أي : $CM = \dfrac{AD}{4}$

بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C و شعاعها $R = \dfrac{AD}{4}$



تمرين 5 : ABC مثلث ، $AB = 6$ ، $AC = 4$ ، $BC = 5$. G مركز ثقل المثلث ABC .

1 لنحدد ( ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$

نعتبر النقطة G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي مركز ثقل المثلث ABC)

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

منه : $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6$ أي $3MG = 6$ أي $MG = 2$

بالتالي ( ) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = 2$

2 لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

نعتبر النقطة I مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ (أي منتصف $[AB]$)

و النقطة J مرجح النقط $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي منتصف $[BC]$)

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ و $\forall M \in (P)\ 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

منه : $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|$ أي $2MI = 2MJ$ أي $MI = MJ$

بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$

3 لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

نعتبر النقطة G مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,3)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

منه : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}\right\|$ أي $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ أي $MG = \dfrac{BC}{2}$

بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = \dfrac{BC}{2}$

- لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق.
- لا حظ أننا ستعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن و في حال كان مجموع المعاملات منعدما (كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)