السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المرجـــــــح حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$

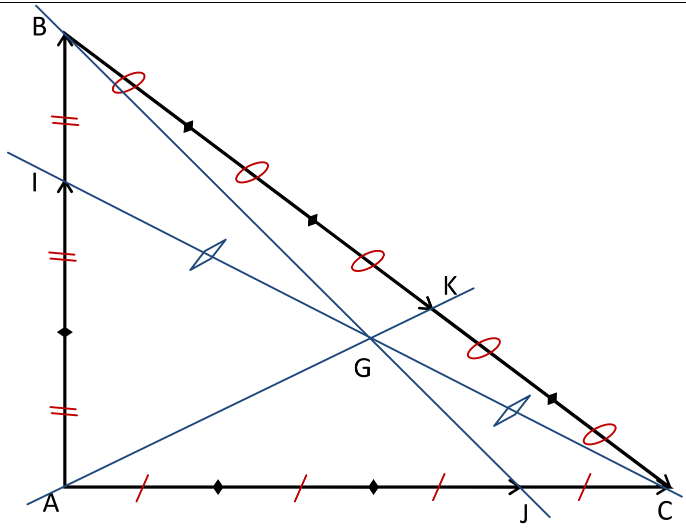
<table>
<tr><td>1</td><td>

لدينا I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$
نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

لدينا J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$$
نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

لدينا K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$$
نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$
إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$
إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G\in(BJ)$
لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$
إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G\in(AK)$
و حسب السؤال السابق $G\in(IC)$
بالتالي: المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

</td></tr>
</table>

خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمية مع هتين النقطتين.

تمرين 2 : $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

1	لدينا $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ منه: D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$
2	لدينا $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه: $-\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه: E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$
3	لنبين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة: $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$ أي لنبين أن: $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$ لدينا E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$ منه: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{CD}$ (1) ولدينا D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ (2) من (1) و (2) نستنتج أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$ أي: $\overrightarrow{CE}=\frac{-2}{6}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ أي: $6\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

بالتالي : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$

يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.

4 لدينا H مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(E,3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(E,6)$

وبما أن C مرجح: $(A,2);(B,1);(E,6)$ فحسب خاصية التجميعية C مرجح: $(B,1);(H,8)$

بالتالي النقط B و C و H مستقيمية.

للبرهان على الاستقامية يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين.

الشكل غير مطلوب ، لذلك لم يتم رسم أي شكل

تمرين 3 : O منتصف $[BC]$ ، H مرجح $\{(C,2);(B,2);(A,-1)\}$

1 لدينا : H مرجح $(C,2);(B,2);(A,-1)$ إذن $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$

نأخذ: $M=O$ فنجد أن: $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ ومنه : $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$

(لأن $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$) ، بالتالي $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$

لم يتم رسم الشكل لكونه لا يتضمن الجديد

2 لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$

لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(A,1);(B,1);(C,1)$

إذن : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ : $M=O$ نجد :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

بالتالي : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

تمرين 4 : $ABCD$ متوازي أضلاع. E مرجح $(C,1)$ ، F مرجح $(C,3)$ و $(D,-2)$

1 لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

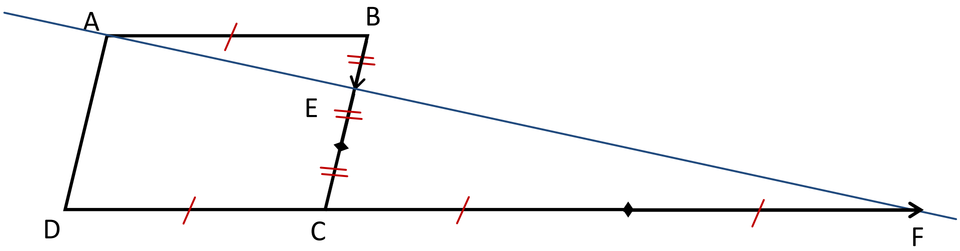
نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{3}{1}\overrightarrow{MC}+\frac{-2}{1}\overrightarrow{MD}$$

نأخذ: $M=D$ فنجد أن: $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DC}$



2 لنبين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين : $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

لدينا: $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DC}+3\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

بالتالي A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$

3 نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.

تمرين 5 : ABC مثلث. E مرجح $(C,-3)$ و $(B,1)$ و F مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$

1 لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$

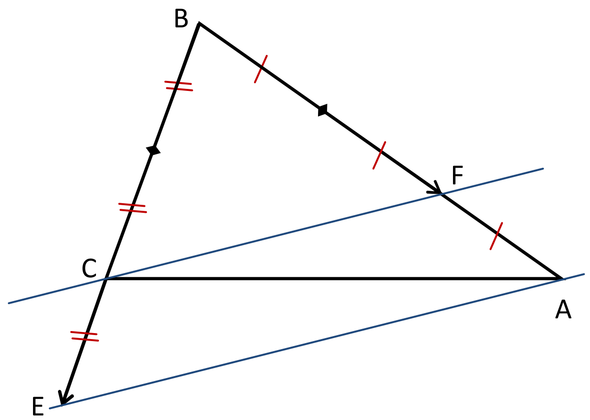
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-3}{-2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{-2}\overrightarrow{MB}$$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

	نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$	نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$	
			
2	لدينا: $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ منه $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$ منه : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{FC}$ بالتالي $(CF)//(AE)$		