

## المرجح القدرات المنتظرة

- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛
- إنشاء مرجح  $n$  نقطة ( $2 \leq n \leq 4$ )؛
- استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛
- استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛
- استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

### 1- مرجح نقطتين

#### 1- النقطة المترزة

##### تعريف

لتكن  $A$  نقطة من المستوى و  $\alpha$  عددا حقيقيا الزوج  $(A; \alpha)$  يسمى نقطة مترزة. نقول كذلك النقطة  $A$  معينة بالمعامل  $\alpha$ . أو العدد  $\alpha$  وزن النقطة  $A$ .

### 2- مرجح نقطتين

#### أنشطة

- (I) لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين
- 1- بين أنه توجد نقطة وحيدة  $G$  حيث  $\vec{GA} - 4\vec{GB} = \vec{0}$  ثم أنشئها
  - 2- بين أنه توجد نقطة وحيدة  $G$  حيث  $2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$  ثم أنشئها
- (II) لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين و  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين غير منعدمين
- 1- بين إذا كان  $\alpha + \beta \neq 0$  فان توجد نقطة وحيدة  $G$  حيث  $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$
  - 2- إذا كان  $\alpha + \beta = 0$  فانه لا توجد أية نقطة  $G$  حيث  $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$

#### مبرهنة و تعريف

لتكن  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  نقطتين مترزتين من المستوى حيث  $\alpha + \beta \neq 0$ .  
توجد نقطة وحيدة  $G$  من المستوى حيث  $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$   
النقطة  $G$  تسمى مرجح النقطتين المترزتين  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$

#### ملاحظة

إذا كان  $\alpha + \beta = 0$  فان النقطتين المترزتين  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  لا تقبلان مرجحا.

### 3- مركز ثقل نقطتين

#### تعريف

مركز ثقل نقطتين  $A$  و  $B$  هو مرجح  $A$  و  $B$  المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

#### خاصة

مركز ثقل نقطتين  $A$  و  $B$  هو منتصف  $[AB]$

### 4-الصمود

ليكن  $k \in \mathbb{R}^*$

$G$  مرجح النقطتين المترزتين  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$   $\Leftrightarrow \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$  و  $\alpha + \beta \neq 0$

$\Leftrightarrow k\alpha\vec{GA} + k\beta\vec{GB} = \vec{0}$  و  $k\alpha + k\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow G$  مرجح النقطتين المترزتين  $(A; k\alpha)$  و  $(B; k\beta)$

#### خاصة

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

#### تمرين

حدد  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $G$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  في الحالتين

$$أ- \quad 2\vec{GA} - 3\vec{GB} = 5\vec{AB}$$

ب-  $A$  مركز ثقل  $G$  و  $B$ .

## 5- الخاصة المميزة

نشاط

ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين حيث  $\alpha + \beta \neq 0$

$$\forall M \in (P) \quad \alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = (\alpha + \beta) \overline{MG} \quad \text{تكافئ } (B; \beta) \text{ و } (A; \alpha)$$

2- ننسب المستوى  $(P)$  إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overline{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{OB}$$

ب/ استنتج إحداثيتي  $G$  علما أن  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$

ج/ حدد إحداثيتي  $G'$  مرجح  $G'$  مرجح  $(A; -5)$  و  $(B; 2)$  حيث  $A(-2; 3)$  و  $B(1; 4)$

### مراجعة

$\alpha$  و  $\beta$  عددان حقيقيان حيث  $\alpha + \beta \neq 0$

تكون  $G$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  إذا و فقط إذا كان لكل  $M$  من المستوى

$$\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = (\alpha + \beta) \overline{MG}$$

### نتيجة

$\alpha$  و  $\beta$  عددان حقيقيان حيث  $\alpha + \beta \neq 0$

تكون  $G$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  إذا و فقط إذا كان

$$\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$$

تكون  $G$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  إذا و فقط إذا كان

$$\overline{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overline{BA}$$

### ملاحظة

مرجح نقطتين مختلفتين  $A$  و  $B$  تنتمي إلى المستقيم  $(AB)$

## 6- احداثيا مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . لتكن  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  و  $G(x_G; y_G)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases} \quad \text{إذا كان } G \text{ مرجح } (A; \alpha) \text{ و } (B; \beta) \text{ فان}$$

### تمرين

أنشئ  $G$  مرجح  $(A; -2)$  و  $(B; 3)$  ثم أنشئ  $G'$  مرجح  $(A; 2)$  و  $(B; 1)$

أحسب  $\overline{GG'}$  بدلالة  $\overline{AB}$

### تمرين

أنشئ  $I$  مرجح  $(A; 2)$  و  $(C; 1)$  ثم  $J$  مرجح  $(A; 1)$  و  $(B; 2)$  و  $K$  مرجح  $(C; 1)$  و  $(B; -4)$

1- أثبت أن  $B$  مرجح  $(C; 1)$  و  $(K; 3)$

2- بين أن  $J$  منتصف  $[KI]$ .

### تمرين

لتكن  $A \neq B$

1- حدد مجموعة النقط  $M$  حيث  $\|3\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = 0$

2- حدد مجموعة النقط  $M$  حيث  $\|3\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = \|2\overline{MA} + 3\overline{MB}\|$

تمرين: حدد إحداثيتي  $G$  مرجح  $(A; -2)$  و  $(B; 6)$  حيث  $A(-1; 2)$  و  $B(-4; 3)$

## II- مرجح ثلاث نقط

### 1- أنشطة

نشاط 1

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط من المستوى

$$1- \text{ أنشئ } G \text{ حيث } \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$2- \text{ هل يمكن إنشاء } G \text{ حيث } \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

نشاط  
لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط مختلفة و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  أعداد حقيقية

$$*) \text{ نحدد } G \text{ حيث } \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

الجواب

$$\text{لدينا } (*) \text{ تكافئ } (\alpha + \beta + \lambda)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$$

$$*) \text{ إذا كان } \alpha + \beta + \lambda \neq 0 \text{ فإن } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta + \lambda)}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{(\alpha + \beta + \lambda)}\overrightarrow{AC}$$

ومنه توجد نقطة وحيدة  $G$  حيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$*) \text{ إذا كان } \alpha + \beta + \lambda = 0 \text{ فإن } \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

- إذا كان  $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  فإنه لا توجد نقطة  $G$  حيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

- إذا كان  $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  فإن جميع نقط المستوى تحقق  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

## 2- مبرهنة و تعريف

لتكن  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  نقط متزنة من المستوى حيث  $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ .

توجد نقطة وحيدة  $G$  من المستوى حيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

النقطة  $G$  تسمى مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$

## ملاحظة

إذا كان  $\alpha + \beta + \lambda = 0$  فإن النقط المتزنة  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  لا تقبل مرجحا

## 3- مركز ثقل ثلاث نقط

### تعريف

مركز ثقل ثلاث نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  هو مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  بنفس المعامل الغير المنعدم.

### خاصة

مركز ثقل ثلاث نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  هو مرجح  $(A; 1)$  و  $(B; 1)$  و  $(C; 1)$

### خاصة

متوسطات مثلث  $ABC$  تتلاقى في نقطة وحيدة  $G$  هي مركز ثقل المثلث  $ABC$

$$\text{و تحقق } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

إذا كان  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  منتصفات  $[BC]$  و  $[AC]$  و  $[AB]$  على التوالي فإن  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$  و

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \text{ و } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

## 4- خاصة

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

## 5- الخاصية المميزة

نشاط

$\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  أعداد حقيقية حيث  $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$

1- بين أن  $G$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  تكافئ  $(\alpha + \beta + \lambda)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{MC}$

2- ننسب المستوى  $(P)$  إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \lambda}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \lambda}\overrightarrow{OC}$$

ب/ استنتج إحداثيتي  $G$  علما أن  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$

### مبرهنة

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$  و  $\lambda$  أعداد حقيقية حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  تكون  $G$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  إذا و فقط إذا كان لكل  $M$  من المستوى  $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \lambda \overline{MC} = (\alpha + \beta + \lambda) \overline{MG}$

### 6- إحداثيات مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  . لتكن  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  و  $C(x_C; y_C)$  و

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \lambda x_C}{\alpha + \beta + \lambda} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha + \beta + \lambda} \end{cases} \text{ فان } (C; \lambda) \text{ و } (B; \beta) \text{ و } (A; \alpha) \text{ مرجح } G(x_G; y_G) \text{ إذا كان } G$$

### 7- خاصية التجميعية

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$  و  $\lambda$  أعداد حقيقية حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  ومنه  $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \lambda \overline{MC} = (\alpha + \beta + \lambda) \overline{MG}$  \* لو كان  $\alpha + \beta \neq 0$  فان  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  تقبل مرجحا  $G_1$  ومنه  $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = (\alpha + \beta) \overline{MG_1}$  وبالتالي  $(\alpha + \beta) \overline{MG_1} + \lambda \overline{MC} = ((\alpha + \beta) + \lambda) \overline{MG}$  إذن  $G$  مرجح  $(G_1; \alpha + \beta)$  و  $(C; \lambda)$  \* بنفس الطريقة نبين أن  $G$  مرجح  $(G_2; \alpha + \lambda)$  و  $(B; \beta)$  حيث  $G_2$  مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(C; \lambda)$  \* بنفس الطريقة نبين أن  $G$  مرجح  $(G_3; \beta + \lambda)$  و  $(A; \alpha)$  حيث  $G_3$  مرجح  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$

### خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

### تمرين

أنشئ  $G$  مرجح  $(A; 1)$  و  $(B; 1)$  و  $(C; 2)$  أنشئ  $G'$  مرجح  $(A; -3)$  و  $(B; 2)$  و  $(C; -1)$

### تمرين

$ABC$  مثلث و  $G$  مرجح  $(A; 1)$  و  $(B; 4)$  و  $(C; -2)$  و  $D$  نقطة حيث  $\overline{AD} = \frac{4}{5} \overline{AB}$

أنشئ الشكل بين أن  $D$  و  $C$  و  $G$  مستقيمة

### تمرين

$ABC$  مثلث. حدد مجموعة النقط  $M$  حيث  $\|2\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = \|-2\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\|$

### III- مرجح أربع نقط

#### 1- مبرهنة و تعريف

لتكن  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  و  $(D; \mu)$  نقط متزنة من المستوى حيث

$$\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$$

توجد نقطة وحيدة  $G$  من المستوى حيث  $\alpha \overline{GA} + \beta \overline{GB} + \lambda \overline{GC} + \mu \overline{GD} = \vec{0}$  النقطة  $G$  تسمى مرجح  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  و  $(D; \mu)$

#### ملاحظة

إذا كان  $\alpha + \beta + \lambda + \mu = 0$  فان النقط المتزنة  $(A; \alpha)$  و  $(B; \beta)$  و  $(C; \lambda)$  و  $(D; \mu)$  لا تقبل مرجحا

#### 2- مركز ثقل أربع نقط

#### تعريف

مركز ثقل أربع نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  هو مرجح  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

### خاصة

مركز ثقل أربع نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  هو مرجح  $(A;1)$  و  $(B;1)$  و  $(C;1)$  و  $(D;1)$

### 3- خاصة

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

### 4- الخاصة المميزة

#### مبرهنة

$\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$  حيث  $\mu$  و  $\lambda$  و  $\beta$  و  $\alpha$  تكون  $G$  مرجح  $(A;\alpha)$  و  $(B;\beta)$  و  $(C;\lambda)$  و  $(D;\mu)$  إذا و فقط إذا كان لكل  $M$  من المستوى

$$\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \lambda \overline{MC} + \mu \overline{MD} = (\alpha + \beta + \lambda + \mu) \overline{MG}$$

### 5- خاصة التجميعية

#### خاصة

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتهما.

#### تمرين

$ABCD$  متوازي الأضلاع  
أنشئ  $G$  مرجح  $(A;1)$  و  $(B;1)$  و  $(C;2)$  و  $(D;1)$   
بين أن  $G \in (AC)$