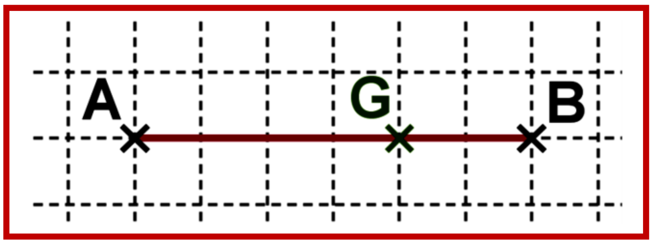
درس : المرجح في المستوى

I. مرجح نقطتين متزنتين:

A. نقطة متزنة - المرجح لنقطتين متزنتين:

1. نشاط :



A و B نقطتان من $(\mathcal{P})$ حيث I منتصف $[A,B]$.

1) حدد G من $(\mathcal{P})$ حيث $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

2) أنشئ G حيث : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

3) كم توجد من نقطة G حيث: $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

4) هل توجد نقطة G حيث: $3\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

2. مفردات :

في الكتابة : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

- العدد a يسمى وزن النقطة A , أو نقول أن النقطة A معينة بالمعامل a .
- الزوج (A,a) يسمى نقطة متزنة .
- المجموعة : $S=\{(A,a),(B,b)\}$ تسمى نظمة متزنة .
- في حالة $a+b\neq 0$: G تسمى مرجح النظمة المتزنة S.

حالة خاصة: $a=b$ و $a\neq 0$. G تسمى مركز ثقل A و B

3. خاصية و تعريف :

لتكن (A,a) و (B,b) نقطتين متزنتين من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث $A\neq B$ و a و b من $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a+b\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G من $(\mathcal{P})$ حيث $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
- G تسمى مرجح النظمة المتزنة $S=\{(A,a),(B,b)\}$ أو G مرجح النقطتين المتزنتين (A,a) و (B,b).

4. برهان:

لدينا : $(\ a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ و $a+b\neq 0\ )$: (1)

$$(1)\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB}=\vec{0} \text{ و } a+b\neq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB} \text{ و } a+b\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \text{ و } a+b\neq 0$$

بمأن A و B نقطتين معلومتين من $(\mathcal{P})$ إذن المتجهة $\overrightarrow{AB}$ وحيدة و نفس الشيء للعدد $\frac{b}{a+b}$ فهو وحيد و بالتالي النقطة G وحيدة حيث $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

خلاصة: G وحيدة حيث $a+b\neq 0$ و $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

B. خاصيات مرجح نقطتين متزنتين:

1. صمود :

a. نشاط:

النقطة G مرجح النظمة المتزنة $S=\{(A,a),(B,b)\}$.

1) حدد G' مرجح النظمة المتزنة $\{(A,ka),(B,kb)\}$ هل هناك شرط على k ؟ أعط الخاصية.

b. خاصية:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$ فإن لكل k من $\mathbb{R}^*$ ؛ G هي كذلك مرجح النظمة المتزنة $\{(A,ka),(B,kb)\}$
(مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب وزنيهما في نفس العدد الحقيقي الغير المنعدم).

2. الخاصية المميزة :

a. نشاط:

1) [G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$] : (1) و M نقطة من $(\mathcal{P})$.

أ - أكتب $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$.

ب: أتمم التكافؤ التالي: $(1) \Leftrightarrow \forall M\in(\mathcal{P}) : a\overrightarrow{\cdots}+b\overrightarrow{\cdots}=(\cdots\cdots)\overrightarrow{MG}$

2) نأخذ: $A=M$ أو $B=M$ في العلاقة (1) ماذا تستنتج ؟

b. الخاصية المميزة :

- G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$ يكافئ $\forall M\in(\mathcal{P}) : a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ و $a+b\neq 0$
- A و B و G نقط مستقيمية حيث: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

3. موقع أو إنشاء G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$

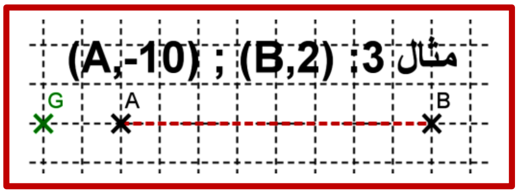
- طريقة تقسيم $[AB]$ إلى $|a+b|$ قطعة متساوية.

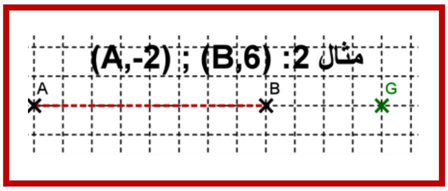
من خلال الكتابة $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ نستنتج أن:

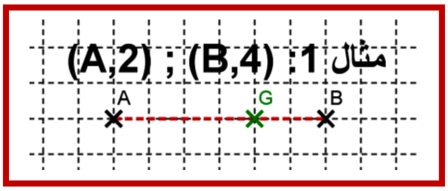
بتقسيم $[AB]$ إلى $|a+b|$ قطعة متساوية طول كل قطعة هو $d=\dfrac{AB}{|a+b|}$ و G تكون على بعد $|b|\times d$ من A (أو أيضا النقطة G موقع يكون على بعد $|b|$ قطعة من جهة A) و الاتجاه يحدد حسب الحالات التالية.

- $\dfrac{b}{a+b}\in[0,1]$ فإن $G\in[AB]$. (G ذلك داخل القطعة)
- $\dfrac{b}{a+b}>1$ فإن $G\in[AB)$ و $G\notin[AB]$. G خارج القطعة في اتجاه B).
- $\dfrac{b}{a+b}<0$ فإن $G\in[BA)$ و $G\notin[AB]$. G خارج القطعة و ليست في اتجاه B).

- مثال 1: $\{(A,2),(B,4)\}$ ؛ (أنشئG) مثال 2: $\{(A,-2),(B,6)\}$ ؛ (أنشئG) مثال 3: $\{(A,-10),(B,2)\}$ ؛ (أنشئG)







- طريقة متوازي الأضلاع:

نأخذ نقطة M حيث: $M\notin(AB)$ (أي خارج المستقيم (AB)).

ننشئ النقطتان A' و B' حيث $\overrightarrow{MA'}=a\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB'}=b\overrightarrow{MB}$ (1). ومنه $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}$ (3) أي $[MC]$ قطر لمتوازي الأضلاع $A'MB'C$.

حسب الخاصية المميزة : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ (2)

من خلال (1) و (2) نحصل على: $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ (4) .

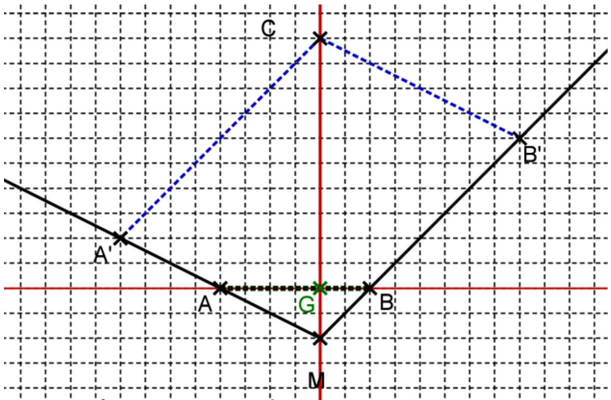
من خلال (3) و (4) نحصل على $(a+b)\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MC}$.

و منه : M و G و C نقط مستقيمية إذن $G\in(MC)$.

و نعلم بأن A و B و G نقط مستقيمية. إذن $G\in(AB)$

ومنه $G\in(AB)\cap(MC)$ بالتالي : $(MC)\cap(AB)=\{G\}$.

مثال: $(A,4)$ و $(B,3)$



مثال 4 باستعمال طريقة متوازي الأضلاع
$(A,2)$ و $(B,4)$

4. تطبيقات:

a. حدد مجموعة النقط M من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث: $\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|=12$.

b. حدد مجموعة النقط M من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث: $\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|=\|4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|$.

جواب:

a. نحدد مجموعة النقط:

نعتبر G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2),(B,4)\}$.حسب الخاصية المميزة نحصل على: $\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|=6\Leftrightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=12$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\|=2$$
$$\Leftrightarrow MG=2$$

خلاصة : مجموعة النقط هي : الدائرة $\mathcal{C}(G,2)$.

b. نحدد مجموعة النقط:

نعتبر G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2),(B,4)\}$ و G' مرجح النظمة المتزنة $\{(A,4),(B,2)\}$.

حسب الخاصية المميزة نحصل على: $\|2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|=\|4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|\Leftrightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=\|6\overrightarrow{MG'}\|$

$$\Leftrightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MG'}\|\Leftrightarrow MG=MG'$$

خلاصة : مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GG']$.

C. إحداثيتي G مرجح النظمة متزنة $S=\{(A,a),(B,b)\}$:

1. نشاط:

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $G(x_G,y_G)$

1. أعط إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$.
2. أكتب المتجهة $\overrightarrow{OG}$ بدلالة المتجهات: $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$.
3. استنتج إحداثيتي G بدلالة إحداثيات النقط A و B .

2. خاصية :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $G(x_G,y_G)$ نقط من $(\mathcal{P})$.

G مرجح النظمة المتزنة $\{(B,b);(A,a)\}$ فإن: $y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}$ و $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}$

II. مرجح ثلاث نقط متزنة :

A. مرجح ثلاث نقط متزنة:

1. نشاط:

نريد معرفة هل توجد نقطة وحيدة G من $(\mathcal{P})$ بالنسبة لنقط المتزنة $\{(C,4);(B,-3);(A,1)\}$ (أي $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

1) أكتب $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. ثم استنتج وحدانية G .

2) لتكن K مرجح $\{(B,-3);(A,1)\}$:

أ- بين : $-2\overrightarrow{GK}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

ب- ماذا يمكن أن نستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

ج- ماذا يمكن أن نقول عن النقط G و K و C ؟

2. تعريف و خاصية :

> لتكن $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ ثلاث نقط متزنة من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث : $a+b+c\neq 0$.
>
> ⫽ توجد نقطة وحيدة G تحقق : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
>
> ⫽ النقطة G تسمى مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$
>
> ⫽ $a=b=c$ النقطة G تسمى مركز ثقل المثلث ABC .

3. ملحوظة:

A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي إذن: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ و G مركز ثقل المثلث ABC إذن

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. ومنه: $\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$

⫽ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

⫽ و منه : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

بنفس الطريقة نحصل على : $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA'}$ و $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA'}$

B. خاصيات:

1. صمود :

a. خاصية :

> G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فإن لكل k من $\mathbb{R}^*$ ؛ G هي كذلك مرجح النظمة المتزنة
> $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$. (مرجح لثلاث نقط متزنة لا يتغير بضرب معاملاتها في نفس العدد الحقيقي الغير المنعدم).

2. الخاصية المميزة:

a. خاصية:

> G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ إذا وفقط إذا كان : $a+b+c\neq 0$ و
> $\forall M\in(\mathcal{P}) : a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

3. تجميعية المرجح : (المرجح الجزئي)

a. خاصية:

مرجح ثلاث نقط متزنة لا يتغير إذا عوضنا نقطتين منها بمرجحهما بوزن يساوي مجموع وزنيهما .
أو أيضا : G_2 مرجح $\{(A,a),(B,b)\}$ (مع $a+b\neq 0$) و G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فان G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

b. برهان:

G مرجح $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$. G_2 مرجح $\{(A,a),(B,b)\}$ (مع $a+b\neq 0$).

نبين أن: G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

لدينا:

$$\begin{aligned}(a+b)\overrightarrow{GG_2}+c\overrightarrow{GC}&=a\overrightarrow{GG_2}+b\overrightarrow{GG_2}+c\overrightarrow{GC}\\&=a\overrightarrow{GA}+a\overrightarrow{AG_2}+b\overrightarrow{GB}+b\overrightarrow{BG_2}+c\overrightarrow{GC}\\&=a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+a\overrightarrow{AG_2}+b\overrightarrow{BG_2}\\&=\underbrace{a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}+\underbrace{a\overrightarrow{AG_2}+b\overrightarrow{BG_2}}_{\vec{0}}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

(G مرجح $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ و G_2 مرجح $\{(A,a),(B,b)\}$)

خلاصة: G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

c. أمثلة:

مثال 1 : مركز ثقل مثلث:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,1);(B,1);(A,1)\}$ (أي مركز ثقل المثلث ABC. A' منتصفات $[BC]$ إذن A' مرجح $\{(C,1);(B,1)\}$.

و منه : G مرجح النظمة المتزنة $\{(A',2);(A,1)\}$. إذن: $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AA'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

مثال 2:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,3);(B,-2);(A,-2)\}$.

نعتبر G_2 مرجح $\{(A,-2),(B,-2)\}$ إذن G_1 منتصف $[AB]$.

ومنه : G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,3),(G_2,-4)\}$. وبالتالي : $\overrightarrow{CG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CG_2}=\frac{-4}{-1}\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}$

C. إحداثيتي G مرجح النظمة متزنة:

1. نشاط:

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ و $G(x_G,y_G)$

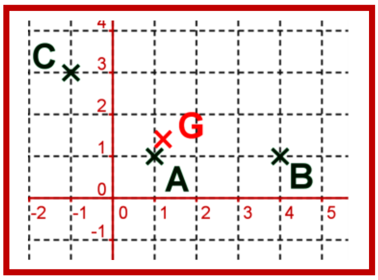
1. أعط إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$. ثم أكتب المتجهة $\overrightarrow{OG}$ بدلالة المتجهات: $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$
2. استنتج إحداثيتي G بدلالة إحداثيات النقط A و B و C .

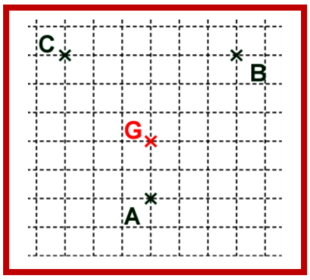
2. خاصية :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ و $G(x_G,y_G)$ نقط من $(\mathcal{P})$.
G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فإن: $y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$ و $x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$

3. إنشاء مرجح ثلاث نقط متزنة:

a. مثال: مثال 1 $\{(C,1);(B,1);(A,3)\}$ مثال 2





مثال 1 : أنشئ G مرجح $(A,3)$; $(B,1)$; $(C,1)$.

مثال 2 : في المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

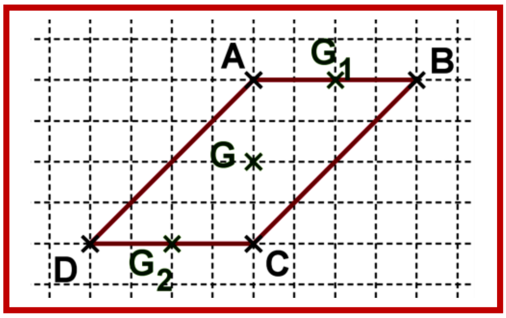
نعتبر النقط $(A(1,1);3)$ و $(B(4,1);1)$ و $(C(-1,3);1)$.

حدد إحداثيتي $G(a,b)$ مرجح النقط المتزنة .

III. مرجح أربع نقط متزنة :

A. مرجح أربع نقط متزنة:

1. نشاط



ليكن ABCD متوازي الاضلاع مركزه O . لتكن $(C,1);(B,1)$ $(A,1)$ و $(D,1)$ أربع نقط متزنة من $(\mathcal{P})$.

1) حدد G_1 مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,1)$.

2) حدد G_2 مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(D,1)$.

3) هل النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ تقبل نقطة G من $(\mathcal{P})$ حيث : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

4) أعط استنتاج لذلك .

2. تعريف وخاصية :

لتكن $(A,a);(B,b);(C,c)$ و (D,d) أربع نقط متزنة من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث : $a+b+c+d\neq 0$.

- توجد نقطة وحيدة G تحقق : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
- النقطة G تسمى مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$
- $a=b=c=d$ النقطة G تسمى مركز ثقل الرباعي ABCD .

B. خاصيات:

1. صمود :

a. خاصية:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$

لكل k من $\mathbb{R}^*$ ؛ G هي كذلك مرجح النظمة المتزنة $\{(D,kd),(C,kc),(B,kb),(A,ka)\}$

(مرجح لأربع نقط متزنة لا يتغير بضرب معاملاتها في نفس العدد الحقيقي الغير المنعدم).

2. الخاصية المميزة :

a. خاصية:

مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$ إذا و فقط إذا كان $a+b+c+d\neq 0$ ولكل نقطة M من $(\mathcal{P})$

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}=(a+b+c+d)\overrightarrow{MG}$$

3. تجميعية المرجح :

a. خاصية:

G مرجح النظمة : $\{(A,a);(B,b);(C,c);(D,d)\}$

1. مرجح أربع نقط متزنة لا يتغير إذا عوضنا نقطتين منها بمرجحهما و بوزن يساوي مجموع وزنيهما (أو 3 نقط منها) .
   أو أيضا : G_2 مرجح $\{(A,a),(B,b)\}$ (مع $a+b\neq 0$) فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(G_1,a+b),(C,c),(D,d)\}$
2. مرجح أربع نقط متزنة لا يتغير إذا عوضنا ثلاث منها بمرجحها و بوزن يساوي مجموع أوزانها الثلاثة.
   أو أيضا : G_3 مرجح $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ (مع $a+b+c\neq 0$) فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(G_3,a+b+c),(D,d)\}$

C. إحداثيتي G مرجح نظمة متزنة:

1. نشاط : هل بإمكانك إعطاء إحداثيتي النقط G بدلالة إحداثيات النقط A و B و C و D الأوزان a و b و c و d .

2. خاصية :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ و $D(x_D,y_D)$ نقط من $(\mathcal{P})$.

$G(x_G,y_G)$ مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a);(B,b);(C,c);(D,d)\}$ فان :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}$$