

2

التصحيح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز I علوم رياضية



الصفحة

تمارين : المجموعات و التطبيقات
 من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

01

1. نحدد المجموعة E :

$$E = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2xy + y^4 = 0\}$$

المجموعة E عناصرها y من \mathbb{R} بحيث يجب أن نجد x من \mathbb{R} حيث: $x^2 + 2xy + y^4 = 0$ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2xy + y^4 = 0$ لهذا نحل المعادلة: $(y \in \mathbb{R})$

نحسب مميز المعادلة :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4y^2 - 4y^4 \\ &= 4y^2(1 - y^2)\end{aligned}$$

جدول إشارة Δ

y	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$4y^2$	+	+	0	+	+
$1 - y^2$	-	0	+	0	-
$4y^2(1 - y^2)$	-	+	+	0	-

حسب الجدول: $\Delta \geq 0$ على المجال $[-1, 1]$ و منه: $E = [-1, 1]$ 2. نبسط: $((\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})) \cup A$

$$\begin{aligned}((\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})) \cup A &= A \cup ((\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cup C})) \\ ((\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})) \cup A &= ((\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cup C})) \cup A \\ &= ((\overline{A \cup B}) \cup A) \cap ((\overline{A \cup C}) \cup A) \\ &= (\overline{A \cup B \cup A}) \cap (\overline{A \cup C \cup A}) \\ &= (E \cup B) \cap (E \cup C) ; (\overline{X \cup X} = E) \\ &= E \cap E ; (E \cup X = E) \\ &= E\end{aligned}$$

وبالتالي: $((\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})) \cup A = E$

نعطي مثال مضاد على أن الاستلزام غير صحيح:

 $C \subset A \cup B \Rightarrow C \subset A$ او $C \subset B$ بحيث: A و B و C أجزاء من Eنأخذ: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ و $C = \{3, 4, 5, 7\}$ لدينا: $C \subset A \cup B$ ولكن $C \not\subset A$ و $C \not\subset B$ ومنه: $C \subset A \cup B \Rightarrow C \subset A$ أو $C \subset B$ عبارة خاطئة3. نبين أن: $P(E) \cup P(F) \subset P(E \cup F)$

2

التصحیح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز I علوم رياضية



الصفحة

سلسلة رقم

تمارين : المجموعات و التطبيقات

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

ليكن X من $P(E) \cup P(F)$ (1) $(1) \Rightarrow X \in P(E)$ او $X \in P(F)$ $\Rightarrow X \subset E$ او $X \subset F$ $\Rightarrow X \subset E \cup F$ $\Rightarrow X \in P(E \cup F)$ إذن: $X \in P(E) \cup P(F) \Rightarrow X \in P(E \cup F)$ **خلاصة:** $P(E) \cup P(F) \subset P(E \cup F)$

مثال مضاد:

ليكن: $E = \{1\}$ إذن: $P(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$ و $F = \{2\}$ إذن: $P(F) = \{\emptyset, \{2\}\}$ و نعلم ان: $P(E \cup F) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ $P(E) \cup P(F) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ ومنه: $P(E \cup F) \not\subset P(E) \cup P(F)$ 4. نبين أن: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ لتكن: A و B و C أجزاء من E لدينا: $A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)}$ $= A \cap \overline{(B \cap C)}$ $= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$ $= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ • خلاصة: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ 5. نبين أن: $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$ ✓ نبين أن: $B = C \Rightarrow A \Delta B = A \Delta C$ هو صحيح لأن: $A \Delta B = A \Delta C$ ✓ نبين أن: $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$ نبين أن: $B \subset C$ ليكن x من B ونبين أن: $x \in C$ ❖ حالة (1): $x \in A$ لدينا: $x \in B$ إذن: $x \in (A \cap B)$ ومنه: $x \notin A \Delta B$ إذن: $x \notin A \Delta C$ لأن: $(A \Delta B = A \Delta C)$ بما أن: $x \in A$ و $x \notin A \Delta C$ فإن: $x \in A \Delta C$ إذن: $x \in C$ وبالتالي: $x \in B \Rightarrow x \in C$ • خلاصة (1): $B \subset C$ ❖ حالة (2): $x \notin A$ و $x \in B$ إذن: $x \in B \setminus A$ إذن: $x \in A \Delta B$ ومنه $x \in A \Delta C$ لأن $A \Delta B = A \Delta C$ نعلم ان $x \notin A$ و $x \in A \Delta C$ إذن $x \in C$ ومنه $x \in B \Rightarrow x \in C$ • خلاصة (2): $B \subset C$ خلاصة: في كلتا الحالتين $B \subset C$ وبنفس الطريقة نبين ان $C \subset B$ • خلاصة: $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

2

التصحیح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز I علوم رياضية



الصفحة

سلسلة رقم

تمارين : المجموعات و التطبيقات

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

• خلاصة عامة : $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

02

1. أ- نبين أن : f تبائية من E إلى F .

لهذا نبين ان : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ليكن x و x' من E حيث $f(x) = f(x')$ (1) .
ومنه :

$$(1) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

$$\Rightarrow x = x' \quad (\text{لأن } g \circ f \text{ تبائية}) .$$

وبالتالي $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

خلاصة : f تبائية من E إلى F .

ب- نبين أن : (g تبائية) \Rightarrow (f شمولية و g o f تبائية) .

نبين أن : g تبائية من F إلى G .

لهذا نبين ان : $\forall y, y' \in F, g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ ليكن y و y' من F حيث $g(y) = g(y')$ (1) .نعلم أن f شمولية من E إلى F إذن : يوجد x و x' من E حيث $y = f(x)$ و $y' = f(x')$ (1) .

$$(1) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

$$\Rightarrow x = x' \quad (\text{لأن } g \circ f \text{ تبائية}) .$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x') \quad (\text{لأن } f \text{ تطبيق}) .$$

$$\Rightarrow y = y'$$

وبالتالي $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$

خلاصة : g تبائية من F إلى G .

2. نبين أن : (f تطبيق تبائي) \Leftrightarrow (f تطبيق شمولي) .أ- نبين أن : (f تطبيق شمولي) \Rightarrow (f تطبيق تبائي)لهذا نبين : $\forall y \in E, \exists x \in E / y = f(x)$.

ليكن y من E .

لدينا : $f \circ f \circ f(y) = f(y) \Rightarrow f(f \circ f(y)) = f(y)$

$$\Rightarrow f \circ f(y) = y \quad (\text{لأن } f \text{ تطبيق تبائي})$$

$$\Rightarrow f(f(y)) = y$$

إذن يوجد سابق ل y هو f(x)

خلاصة 1 : f تطبيق شمولي .

ب- نبين أن : (f تطبيق تبائي) \Rightarrow (f تطبيق شمولي) .

2

التصحیح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز I علوم رياضية



الصفحة

سلسلة رقم

تمارين : المجموعات و التطبيقات

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

نبين أن : f تبانيية من E إلى E .لهذا نبين أن : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ليكن x و x' من E حيث $f(x) = f(x')$ (1)نعلم أن : f تطبيق شمولي إذن يوجد x_1 و x_1' من E حيث $f(x_1) = x$ و $f(x_1') = x$ (2)ومنه : $(f \circ f)(f(x_1)) = (f \circ f)(f(x_1'))$ (1) (نركب بالتطبيق $f \circ f$) $(f \circ f) \circ f(x_1') = (f \circ f) \circ f(x_1)$ (نركب بالتطبيق $f \circ f$) $\Rightarrow f \circ f \circ f(x_1') = f \circ f \circ f(x_1)$ (لأن مركب التطبيقات تجميعي) $\Rightarrow f(x_1') = f(x_1)$ (لأن $f \circ f \circ f = f$) $\Rightarrow x = x'$ (حسب (2))خلاصة 2 : f تطبيق تبانييخلاصة : $(f \text{ تطبيق تبانيي}) \Leftrightarrow (f \text{ تطبيق شمولي})$ 3. نبين أن : $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ليكن : $y \in f(f^{-1}(B))$ $\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) / f(x) = y$ بما أن : $x \in f^{-1}(B)$ إذن $f(x) \in B$ أي $y \in B$ خلاصة : $f(f^{-1}(B)) \subset B$ 4. بين أن : إذا كان $g \circ f_1 = g \circ f_2$ و g تطبيق تبانيي فإن $f_1 = f_2$.نبين أن : $f_1 = f_2$ - لدينا : f_1 و f_2 تطبيقان من E إلى F إذن لهما نفس مجموعة الانطلاق وكذلك نفس مجموعة الوصول .- نبين أن : $\forall x \in E, f_1(x) = f_2(x)$.ليكن x من E .لدينا : $g \circ f_1(x) = g \circ f_2(x)$ (حسب المعطيات)ومنه : $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$.إذن : $f_1(x) = f_2(x)$ (لأن g تبانيي)خلاصة : $f_1 = f_2$ 5. نبين أن : $g_1 = g_2 \Rightarrow (g_1 \circ f = g_2 \circ f)$ و f تطبيق شمولي .نبين أن : $g_1 = g_2$ - لدينا : g_1 و g_2 تطبيقان من F إلى G إذن لهما نفس مجموعة الانطلاق وكذلك نفس مجموعة الوصول .- نبين أن : $\forall y \in F, g_1(y) = g_2(y)$.ليكن y من F .نعلم أن : f شمولية ومنه : $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$. نضع $y = f(x)$: (1)ومنه : $(g_1 \text{ بالدالة } g_1) \Rightarrow g_1(y) = g_1(f(x))$

2

التصحیح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز | علوم رياضية



الصفحة

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

سلسلة رقم

تمارين : المجموعات و التطبيقات

$$\Rightarrow g_1(y) = g_1 \circ f(x) = g_1 \circ f(x)$$

$$(\text{حسب المعطيات } g_1 \circ f = g_2 \circ f) \Rightarrow g_1(y) = g_2(y)$$

• خلاصة : $g_1 = g_2$

.03

1. نبين أن f ليس تبايني

بما أن الجمع و الضرب تبادليان فإن: (x, y) و (y, x) لهما نفس الصورة $(x+y, xy)$ و منه: f ليس تبايني

2. الشرط الضروري و الكافي لكي يكون الزوج (s, p) من \mathbb{R}^2 ينتمي الى $f(\mathbb{R}^2)$ لدينا: $(s, p) \in \mathbb{R}^2 / (s, p) \in f(\mathbb{R}^2)$

$$(s, p) \in \mathbb{R}^2 / (s, p) \in f(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow (s, p) \in \mathbb{R}^2; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (s, p)$$

$$\Leftrightarrow (s, p) \in \mathbb{R}^2; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x+y, xy) = (s, p)$$

$$\Leftrightarrow (s, p) \in \mathbb{R}^2; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x+y = s \\ xy = p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (s, p) \in \mathbb{R}^2; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / X^2 - sX + p = 0 \Leftrightarrow \text{حلان للمعادلة } x \text{ و } y$$

و هذه المعادلة لها حلول $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow s^2 - 4p \geq 0$$

• خلاصة : الشرط الضروري و الكافي هو $s^2 - 4p \geq 0$ 3. نحدد الصورة العكسية ل $\{(s, p) \in \mathbb{R}^2 / s^2 - 4p = 1\}$ حسب ما سبق: $\Delta = 1$

$$\text{إذن: } X_1 = \frac{s + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{s+1}{2} ; \quad X_2 = \frac{s - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{s-1}{2}$$

إذن: $(y = X_2 \text{ و } x = X_1)$ أو $(y = X_1 \text{ و } x = X_2)$ • خلاصة : $f^{-1}(\{(s, p) \in \mathbb{R}^2 / s^2 - 4p = 1\}) = \{(X_1, X_2); (X_2, X_1)\}$

.04

1. * نحدد $f^{-1}(\{3\})$:

$$x \in f^{-1}(\{3\}) \Leftrightarrow f(x) \in \{3\}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=4$$

$$f^{-1}(\{3\}) = \{0, 4\} \quad \text{إذن:}$$

2

التصحیح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز I علوم رياضية



الصفحة

سلسلة رقم

تمارين : المجموعات و التطبيقات

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

* f ليست تبانيية لان 3 سابقين هما 0 و 4 .

2.

أ- نبين أن : $f(\mathbb{R}) \subset [-1, +\infty[$ أي نبين ان : $y \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow y \in [-1, +\infty[$
لدينا :

$$y \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2 - 4x + 3$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, y + 1 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, y + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, y \geq -1$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, y \in [-1, +\infty[$$

$$y \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow y \in [-1, +\infty[\quad \text{ومنه:}$$

• **خلاصة :** $f(\mathbb{R}) \subset [-1, +\infty[$ ب- تحديد التطبيق: $g \circ f$

لدينا :

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^2 - 4x + 3)$$

$$= x^2 - 4x + 3 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$= x^2 - 4x + 3 + \sqrt{(x-2)^2}$$

$$= x^2 - 4x + 3 + |x-2|$$

• **خلاصة :** $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{I} \xrightarrow{g} \mathbb{I}$

$$x \rightarrow g \circ f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x-2|$$

3.

أ- نبين أن g تقابل :

أي نبين أن : $\forall y \in \mathbb{I}, \exists! x \in \mathbb{I} / g(x) = y$ ليكن $y \in \mathbb{I}$ نحل المعادلة : $x \in \mathbb{I} / g(x) = y$

$$g(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x+1} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y - x$$

$$\Leftrightarrow x+1 = y^2 - 2xy + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x(2y+1) - 1 + y^2 = 0$$

$$\Delta = (2y+1)^2 - 4(y^2 - 1)$$

نحسب : Δ

$$\Delta = 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 + 4$$

$$\Delta = 4y + 5 \geq 1$$

$$X_1 = \frac{2y+1 + \sqrt{4y+5}}{2}$$

$$\text{او } X_2 = \frac{2y+1 - \sqrt{4y+5}}{2}$$

ومنه:

نبين أن: $g^{-1}(y) = \frac{2y+1 + \sqrt{4y+5}}{2}$ غير ممكن

2

التصحیح من طرف مجموعة من تلاميذ ثانوية: عمر بن عبد العزيز I علوم رياضية



الصفحة

سلسلة رقم

تمارين : المجموعات و التطبيقات

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

مثال مضاد : $g(3) = 5$

$$g^{-1}(5) = \frac{2 \times 5 + 1 + \sqrt{(4 \times 5) + 5}}{2} = 8 \quad \text{ولكن} \quad g^{-1}: 5 \rightarrow 3 \quad \text{إذن:} \quad g: 3 \rightarrow 5$$

إذن: $g^{-1}(5) \neq 3$

$$X_2 = \frac{2y + 1 - \sqrt{4y + 5}}{2} \quad \text{و بالتالي: المعادلة لها حل وحيد هو:}$$

• خلاصة: g تقابل من I إلى I ب- نحدد: g^{-1}

حسب ما سبق نستنتج أن:

$$g^{-1}: I \rightarrow I$$

$$x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x + 1 - \sqrt{4x + 5}}{2}$$

4. لنبين أن h غير تبايني:لدينا : $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$n \rightarrow h(n) = \frac{1}{n^2 - 2n + 3}$$

لكي يكون h تبايني يجب أن يتحقق ما يلي:

$$\forall x, x' \in \mathbb{N} / h(x) = h(x') \Rightarrow x = x'$$

ليكن x و x' من \mathbb{N} حيث: $h(x) = h(x')$

$$h(x) = h(x') \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{1}{x'^2 - 2x' + 3} \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 = x'^2 - 2x' + 3$$

$$\Rightarrow x^2 - x'^2 - 2x + 2x' = 0$$

$$\Rightarrow (x - x')(x + x') - 2(x - x') = 0$$

$$\Rightarrow (x - x')(x + x' - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x - x' = 0 \quad \text{أو} \quad x + x' - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = x' \quad \text{أو} \quad x + x' = 2$$

ومنه: h غير تباينيمثال مضاد: $h(0) = h(2) = \frac{1}{3}$ ولتكن: $0 \neq 2$ • خلاصة: $h(x)$ تطبيق غير تبايني5. استنتاج تطبيق k يكون قصور ل h و تبايني:

لنعتبر القصور التالي

$$k: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$n \rightarrow \frac{1}{n^2 - 2n + 3}$$

أو القصور التالي:

$$k: \mathbb{N} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$n \rightarrow \frac{1}{n^2 - 2n + 3}$$