السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المجموعات و التطبيقات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : لتكن A و B و C ثلاث مجموعات غير فارغة. بين أن :

1	$(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap E=A$
2	$(A\setminus B)\setminus C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B\cup C})=A\setminus(B\cup C)$
3	$A\setminus(A\setminus B)=A\cap(\overline{A\cap\overline{B}})=A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\emptyset\cup(A\cap B)=A\cap B$

4

لنبين الاستلزام: $B=C \Rightarrow A\times B=A\times C$

نفترض أن $B=C$ و نبين أن $A\times B=A\times C$

ليكن $(x,y)\in A\times C \Leftrightarrow \begin{cases}x\in A\\ y\in C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in A\\ y\in B\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B$ (لأن: $y\in C \Leftrightarrow y\in B$)

الآن لنبين الاستلزام العكسي: $B=C \Rightarrow A\times B=A\times C$

نفترض أن $A\times B=A\times C$ و نبين أن $B=C$

بما أن $A\neq\emptyset$ فهي تحتوي على الأقل على عنصر و ليكن مثلا a

الآن لدينا: $x\in C \Leftrightarrow (a,x)\in A\times C \Leftrightarrow (a,x)\in A\times B \Leftrightarrow x\in B$ بالتالي: $B=C$

خلاصة: $B=C \Leftrightarrow A\times B=A\times C$

السؤال الرابع هو سؤال سهل/صعب، سهل إذا أدركنا جيدا مفهوم الجذاء الديكارتي لمجموعتين، و صعب إذا كنا نفهمه على أنه شبيه بعملية ضرب الأعداد و نحاول الانتقال في البرهان بشكل غير معلل و ارتجالي نتيجة عدم فهمنا لهذا الجذاء.

تمرين 2 : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين.

1

$(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap E=A$

2

$A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)=\{1;2;3\}\cup\{4;5\}=\{1;2;3;4;5\}$

لإيجاد المجموعة B سنبين المتساوية: $(A\cup B)\setminus A=B\setminus A$

لدينا: $(A\cup B)\setminus A=(A\cup B)\cap\overline{A}=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})=\emptyset\cup(B\cap\overline{A})=B\cap\overline{A}=B\setminus A$

إذن: $B\setminus A=(A\cup B)\setminus A=\{1;2;3;4;5;6;7;9\}\setminus\{1;2;3;4;5\}=\{6;7;9\}$

و بتطبيق السؤال الأول: $B=(B\cap A)\cup(B\setminus A)=\{1;2;3\}\cup\{6;7;9\}=\{1;2;3;6;7;9\}$

يمكنك تظن التساوي $(A\cup B)\setminus A=B\setminus A$ عبر خطاطة لكن يجب البرهان على ذلك.

تمرين 3 : نضع : $A=\left\{x\in IR\,/\,\frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1}\right\}$ ، إذن $A\subset IR$

و لدينا: $\in A \Leftrightarrow \frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1\geq 2|x| \Leftrightarrow x^2+1-2|x|\geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2\geq 0$

بما أن العبارة : $\forall x\in IR\ (|x|-1)^2\geq 0$ صحيحة فإن : $x\in IR \Rightarrow (|x|-1)^2\geq 0 \Rightarrow x\in A$

بالتالي: $A=IR$

إثبات التساوي $A=IR$ يعني ببساطة إثبات صحة العبارة $\forall x\in IR\ \ \frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1}$

تمرين 4 : نضع : $A=\{x\in IR \,/\, |x|<2\}$ و $B=\left\{x\in IR \,/\, \frac{3x-2}{x+2}<1\right\}$

لدينا : $x\in A \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

و $-2<x<2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{2x-4}{x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{3x-2-x-2}{x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x+2}<1 \Leftrightarrow x\in B$

إذن : $x\in B \Leftrightarrow x\in A$ بالتالي : $A=B$

التكافؤ $-2<x<2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2}<0$ نبينه باستعمال جدول الإشارات

تمرين 5 : $A=\left\{\frac{®}{2}+k® \,/\, k\in Z\right\}$ و $B=\left\{\frac{-®}{2}+k® \,/\, k\in Z\right\}$

لدينا : $x\in A \Rightarrow x=\frac{®}{2}+k® \,/\, k\in Z \Rightarrow x=\frac{-®}{2}+®+k® \Rightarrow x=\frac{-®}{2}+(k+1)® \Rightarrow x\in B$

و $x\in B \Rightarrow x=\frac{-®}{2}+k® \,/\, k\in Z \Rightarrow x=\frac{®}{2}-®+k® \Rightarrow x=\frac{®}{2}+(k-1)® \Rightarrow x\in A$

بالتالي : $A=B$

رغم اختلاف تعريف المجموعتين إلا أنهما تتكونان من نفس العناصر، لذلك فهما متساويتان إجمالا، بمعنى عندما نعطي قيمة لـ k سنجد عنصرين مختلفين، لكن توجد قيم أخرى لـ k تعطي نفس العناصر في المجموعة الأخرى.

تمرين 6 : $A=\{(m,n)\in Z^2 \,/\, mn=10\}$ و $B=\left\{\frac{a}{b}\in Q \,/\, (a,b)\in A\right\}$

1

$A=\{(1;10),(-1;-10),(10;1),(-10;-1),(2;5),(-2;-5),(5;2),(-5;-2)\}$

$B=\left\{\frac{1}{10}\,,\,10\,,\,\frac{2}{5}\,,\,\frac{5}{2}\right\}$

2

كلا العبارتين $A\subset B$ و $B\subset A$ غير صحيحتان لكون المجموعة A مجموعة أزواج بينما B مجموعة أعداد جذرية