

سلسلة 1	المجموعات والتطبيقات حل مقترح	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
<p style="text-align: right;"><b>تمرين 1 :</b> <math>E = \{1; 4; -5; 3\}</math></p> <p>1) <math>P(E) = \left\{ \phi, \{1\}, \{4\}, \{-5\}, \{3\}, \{1; 4\}, \{1; -5\}, \{1; 3\}, \{4; -5\}, \{4; 3\}, \{-5; 3\}, \{1, 4, -5\}, \{1, 4, 3\}, \{1; -5; 3\}, \{4; -5; 3\}, \{1; 4; -5; 3\} \right\}</math> تتكون من 16 مجموعة</p> <p>2) <math>K = \{A \in P(E) / 4 \in A\} = \{\{4\}, \{1; 4\}, \{4; -5\}, \{4; 3\}, \{1, 4, -5\}, \{1, 4, 3\}, \{4; -5; 3\}, \{1; 4; -5; 3\}\}</math></p> <p>3) <math>H = \{X \in P(E) / 5 \notin X\} = \phi, \{1\}, \{4\}, \{3\}, \{1; 4\}, \{1; 3\}, \{4; 3\}, \{1, 4, 3\}, \{1; 4; -5; 3\}</math></p>		
<p style="text-align: right;"><b>تمرين 2 :</b> <math>C = ]-2; 4[ \cup ]6; +\infty[</math> ، <math>B = ]-\infty; 3]</math> ، <math>A = [2; 5]</math> ، <math>E = IR</math></p> <p><math>\bar{A} = \{x \in IR / x \notin A\} = ]-\infty; 2[ \cup ]5; +\infty[</math></p> <p><math>\bar{B} = \{x \in IR / x \notin B\} = ]3; +\infty[</math></p> <p><math>\bar{C} = \{x \in IR / x \notin C\} = ]-\infty; 2] \cup [4; 6]</math></p> <p><math>A \setminus B = \{x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B} = [2; 5] \cap ]3; +\infty[ = ]3; 5]</math></p> <p><math>C \cap B = \{x \in C \text{ et } x \in B\} = ]-2; 3]</math></p> <p><math>A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\} = ]-\infty; 5]</math></p>		
<b>تمرين 3 :</b>		
<p><math>(A \setminus C) \cup C = (A \cap \bar{C}) \cup C = (A \cup C) \cap (\bar{C} \cup C) = (A \cup C) \cap E = A \cup C</math></p> <p>• لاحظ أن: <math>\forall X \in P(E) \quad X \cup \bar{X} = E</math> و <math>\forall X \in P(E) \quad X \cap E = X</math></p>		
<p><math>(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) = A \cap \bar{C} \cap B \cap \bar{C} = A \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{C} = (A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap B) \setminus C</math></p> <p>• بوجود التقاطع فقط أو الاتحاد فقط يمكن مبادلة المجموعات والأقواس</p>		
<p><math>(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cup B) \setminus C</math></p> <p>• التعميل (نعني: <math>(Z \cup X) \cap (Z \cup Y) = Z \cup (X \cap Y)</math> و <math>(Z \cap X) \cup (Z \cap Y) = Z \cap (X \cup Y)</math> ) يكون مفيدا جدا و يختصر الجواب في كثير من الحالات كهذا السؤال.</p>		
<p><math>(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap (\overline{B \cap \bar{C}}) = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = ((A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}) \cup ((A \cap \bar{C}) \cap C)</math></p> <p><math>= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \phi) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (\phi)</math> لدينا:</p> <p><math>(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \cap \bar{C} \cap \bar{B}</math></p> <p>ومن جهة أخرى : <math>(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}</math></p> <p>ومن جهة ثالثة : <math>A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}</math></p> <p>بالتالي : <math>(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)</math></p> <p>• استعملنا الخاصيتين <math>(\overline{X \cup Y}) = (\bar{X} \cap \bar{Y})</math> و <math>(\overline{X \cap Y}) = (\bar{X} \cup \bar{Y})</math></p> <p>• لاحظ أيضا فكرة البرهان ، حيث بسطنا كل تعبير على حدة و قارنا النتائج.</p>		

**تمرين 4 :**

استعملنا بداية المتساوية الهامة :  
 $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$   
 بسهولة أو من خلال مخطط

$$(B \setminus A) \cup (B \cap A) = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A) \\ = B \cap (\bar{A} \cup A) = B \cap E = B$$

في السطر الثالث قمنا بالنشر (مثل نشر مجموع في مجموع)  
 استعملنا بعض المتساويات الواضحة:  $X \cap E = X$  و

$$X \cup \phi = X \text{ و } X \cap \phi = \phi$$

يمكن أيضا استعمال الطريقة الاعتيادية، حيث نأخذ عنصرا  $x$  من  $B$  ونبين أنه ينتمي لـ  $C$ ، لكن في هذه الطريقة يجب أن نفصل حالتين  $x \in A$  و  $x \notin A$ ، وطبعاً نعيد الطريقة للبرهان على التضمن العكسي

$$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$$

$$B = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$$

$$B = (B \cup C) \cap (B \cup A) \cap (\bar{A} \cup C) \cap (\bar{A} \cup A)$$

$$B = (B \cup C) \cap (C \cup A) \cap (\bar{A} \cup C) \cap E$$

$$B = C \cup (B \cap A \cap \bar{A})$$

$$B = C \cup (B \cap \phi)$$

$$B = C \cup \phi$$

$$B = C$$

لدينا:

**تمرين 5 :**  $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y) = Y \Delta X$$

1

$$X \Delta X = (X \setminus X) \cup (X \setminus X) = \phi \cup \phi = \phi$$

$$X \Delta E = (X \setminus E) \cup (E \setminus X) = (X \cap \bar{E}) \cup (E \cap \bar{X}) = (X \cap \phi) \cup (\bar{X}) = \phi \cup (\bar{X}) = \bar{X}$$

$$X \Delta \bar{X} = (X \setminus \bar{X}) \cup (\bar{X} \setminus X) = (X \cap X) \cup (\bar{X} \cap \bar{X}) = (X) \cup (\bar{X}) = E$$

$$X \Delta \phi = (X \setminus \phi) \cup (\phi \setminus X) = (X \cap \bar{\phi}) \cup (\phi \cap \bar{X}) = (X \cap E) \cup \phi = X$$

2

$$\bar{X} \Delta \bar{Y} = (\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{Y} \cap X) = X \Delta Y$$

3

$$(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \cap (\overline{X \cap Y}) = (X \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y}) = (X \cap \bar{X}) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (Y \cap \bar{X}) \cup (Y \cap \bar{Y}) \\ = \phi \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (Y \cap \bar{X}) \cup \phi = (X \cap \bar{Y}) \cup (Y \cap \bar{X}) = X \Delta Y$$

4

المطلوب إثبات متساوية، لذلك من الأفضل البدء بالتعبير الذي يمكن إجراء عمليات عليه و الذي في حالتنا هو  $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ .

**تمرين 6 :**

$$X \setminus Y = \phi \Rightarrow X \cap \bar{Y} = \phi \Rightarrow (X \cap \bar{Y}) \cup Y = Y \Rightarrow (X \cup Y) \cap (\bar{Y} \cup Y) = Y \Rightarrow (X \cup Y) \cap E = Y \\ \Rightarrow X \cup Y = Y \Rightarrow X \subset Y$$

لدينا :

$$X \subset Y \Rightarrow X \cap \bar{Y} \subset Y \cap \bar{Y} \Rightarrow X \cap \bar{Y} \subset \phi \Rightarrow X \setminus Y = \phi$$

عكسيا:

للبرهان أن مجموعة ضمن أخرى يمكن البرهان أن اتحادهما يساوي أحدهما أو تقاطعهما يساوي أحدهما.

كل مجموعة ضمن المجموعة الفارغة هي مجموعة فارغة